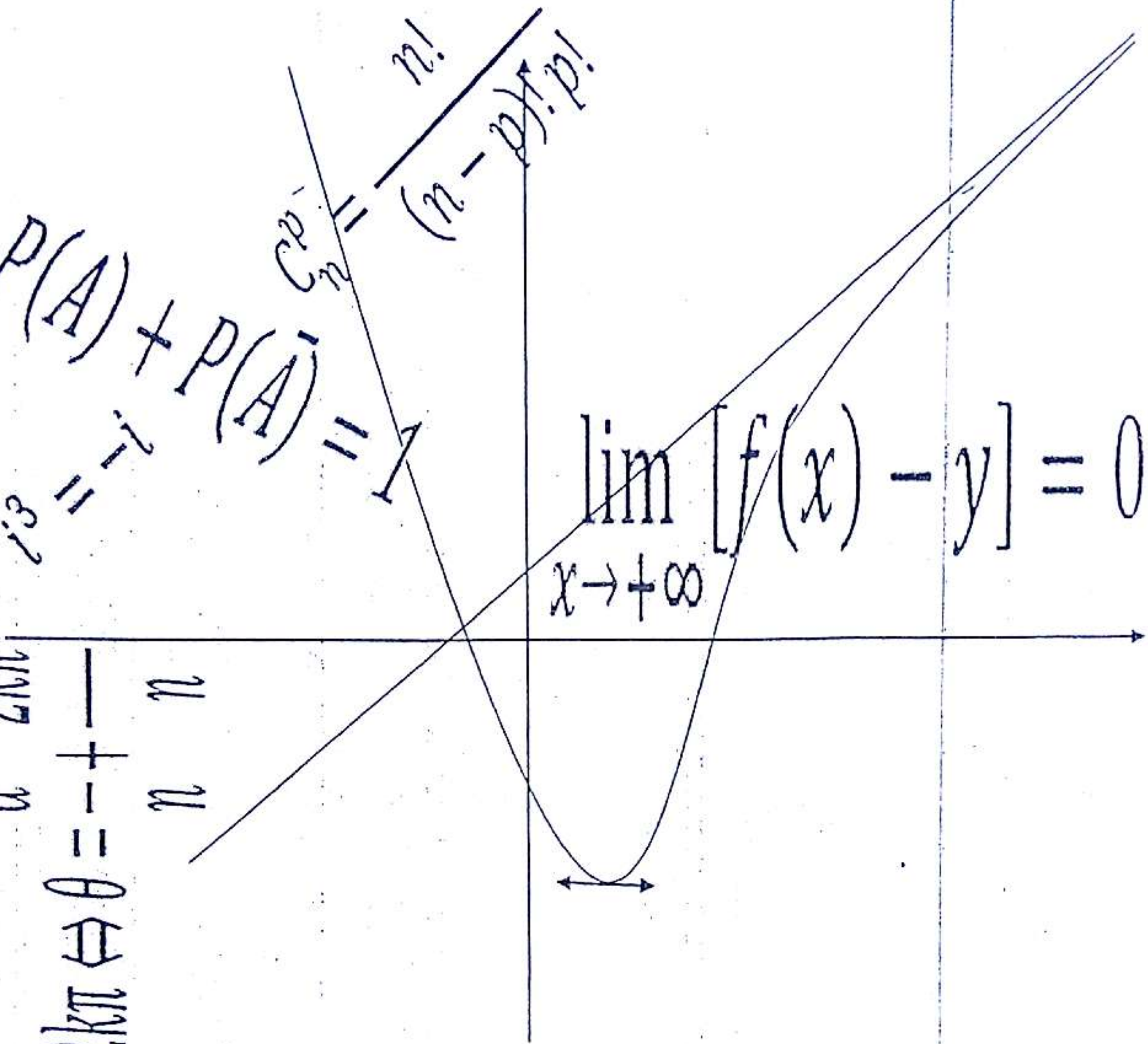
Les Derniers BAC en Mathématiques série D

Première édition **(les BAC D de 2001 à 2018)**

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$

$$i^3=-i$$



$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=0$$

$$n\theta=\alpha+2k\pi \Leftrightarrow \theta=\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}$$

$$\exists!\,\alpha\in]x_1;x_2[,\quad f(\alpha)=0$$

$$A(\alpha)=\left(\int_{x_0}^{\alpha}(f(x)-y)\,dx\right)u_a$$

$$\int_1^{\alpha}\frac{\ln x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\ln^2(\alpha)$$

REPUBLIQUE DU TCHAD
UNIVERSITE DE N'DJAMENA
OFFICE DU BACCALAUREAT

Unité - travail - Progrès

BACCALAUREAT DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE
SESSION DE JUIN 2000
SERIE : D
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE : 4 HEURES
COEFFICIENT : 4

EXERCICE 1 :

Dans l'ensemble C des nombres complexes on considère.
$f(z) = z^4 + 4iz^3 + 12(1+i)z - 45$.

a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ a une et une seule racine réelle z_0 que l'on calculera.
b) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ a une et une seule solution imaginaire pure z_1 que l'on calculera.
c) Factoriser le polynôme $f(z)$ et résoudre l'équation $f(z) = 0$.

EXERCICE 2 :

Une caisse contient 10 cubes bleus, 22 cubes jaunes et 4 cubes rouges, tous de la même taille.
1°) Quelle est la probabilité de pouvoir faire le drapeau du Tchad :
a) En prenant simultanément 3 cubes ?
b) En prenant simultanément 4 cubes ?
2°) Quelle est la probabilité, en prenant successivement 3 cubes l'un après l'autre sans remise, d'obtenir dans l'ordre le drapeau du Tchad ?

PROBLEME

On considère la fonction numérique f d'une variable x définie par :
$f(x) = 1 + x - e^x$; $x \in \mathbb{R}$.

I/
1°) Calculer :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$;

2°) Etudier les variations de f.
3°) On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C). Préciser la position de (C) par rapport à (D).
4°) Trouver l'équation de la tangente (D') à (C) au point d'abscisse $x = 0$. Préciser la position de (C) par rapport à (D).
5°) Tracer la courbe (C), en faisant figurer la tangente (D).

II/
1°) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1}.
2°) Tracer le graphe (L) de f^{-1}.
3°) Calculer l'aire A (m) de la région P (m) de plan comprise entre la courbe (L) et les droites d'équations :
$y = x - 1$, $y = 0$ et $y = m$, $m > 0$.
Trouver la limite de A (m) lorsque m tend vers $+\infty$.

Sujet n°1 Bac 2000 (D)

Exercice n°1

$$f(z) = z^4 + 4iz^2 + 12(1+i)z - 45$$

a) Montrons que $f(z) = 0$ a une et une seule racine réelle z_0.

Posons $z = z_0$

$f(z_0) = z_0^4 + 4iz_0^2 + 12(1+i)z_0 - 45$

$f(z_0) = 0 \Leftrightarrow z_0^4 + 4iz_0^2 + 12z_0 + 12iz_0 - 45 = 0$

$\Leftrightarrow z_0^4 + 12z_0 - 45 + i(4z_0^2 + 12z_0) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_0^4 + 12z_0 - 45 = 0 & (1) \\ 4z_0^2 + 12z_0 = 0 & (2) \end{cases}$$

Résolvons (2) $4z_0(z_0 + 3) = 0$

$4z_0 = 0$ ou $z_0 + 3 = 0$

$z_0 = 0$ ou $z_0 = -3$

$(-3)^4 + 12(-3) - 45 \stackrel{?}{=} 0$

$81 - 36 - 45 = 0$

Donc, $\boxed{z_0 = -3}$ est racine réelle de $f(z) = 0$

b) Montrons que $f(z) = 0$ a une et une seule racine imaginaire pure z_1.

Posons $z = iz_1$

$P(iz_1) = (iz_1)^4 + 4i(iz_1)^2 + 12(1+i)(iz_1) - 45$

$P(iz_1) = 0 \Leftrightarrow z_1^4 - 4iz_1^2 + 12iz_1 - 12z_1 - 45 = 0$

$\Leftrightarrow z_1^4 - 12z_1 - 45 + i(-4z_1^2 + 12z_1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_1^4 - 12z_1 - 45 = 0 & (1) \\ -4z_1^2 + 12z_1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Résolvons (2) $-4z_1(z_1 - 3) = 0$

$-4z_1 = 0$ ou $z_1 - 3 = 0$

$z_1 = i$ ou $z_1 = 3$

Vérification avec (1)

$(3)^4 - 12(3) - 45 \overset{?}{=} 0$

$81 - 36 - 45 = 0$

Donc, $\boxed{z_1 = 3i}$ est donc racine imaginaire pure de $f(z) = 0$

c) Factorisons $f(z)$ et résolvons $f(z)$.

* Factorisons $f(z)$

$f(z) = (z - z_0)(z - z_1)(az^2 + bz + c)$

$= (z^2 + 3)(z - 3i)(az^2 + bz + c)$

$f(z) = (z^2 - 3iz + 3z - 9i)(az^2 + bz + c)$

$= az^4 + bz^3 + cz^2 - 3iaz^3 - 3ibz^2 - 3icz + 3az^3 + 3bz^2 + 3cz - 9iaz^2$

$- 9ibz - 9ic$

$= az^4 + (b - 3ia + 3a)z^3 + (c - 3ib + 3b - 9ia)z^2 + (-3ic + 3c - 9ib)z$

$- 9ic$

Par identification,

$$\begin{cases} az^4 = z^4 \\ (b - 3ia + 3a)z^3 = 0 \\ (c - 3ib + 3b - 9ia)z^2 = 4iz^2 \\ (-3ic + 3c - 9ib)z = 12(1+i)z \\ -9ic = -45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -5i \\ b = 3i - 3 \\ c - b(3i - 3) - 9i = 4i \\ -5i - b(3i - 3) = 13i \end{cases}$$

$\Rightarrow -b(3i - 3) = 18i$

$b = \dfrac{-18i}{3i - 3} = \dfrac{-18i(-3 - 3i)}{9 + 9}$

$b = \dfrac{-54 + 54i}{18} = -3 + 3i$

$a = 1$; $b = -3+3i$; $c = -5i$

$$\boxed{f(z) = (z+3)(z-3i)(z^2+(-3+3i)z-5i)}$$

Factorisons : $z^2+(-3+3i)z-5i$

$$\Delta = (-3+3i)^2 - 4(-5i)$$

$$\Delta = 9 - 18i - 9 + 20i$$

$$\Delta = 2i = (1+i)^2$$

$$z_1 = \frac{3-3i-1-i}{2} = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$$

$$z_2 = \frac{3-3i+1+i}{2} = \frac{4-2i}{2} = 2-i$$

$\boxed{f(z) = (z+3)(z-3i)(z-1+2i)(z-2+i)}$ forme factorisée de $f(z)$

* Résolution de $f(z)$.

$f(z) = 0 \iff (z+3)(z-3i)(z-1+2i)(z-2+i) = 0$

$z+3 = 0$ ou $z-3i = 0$ ou $z-1+2i = 0$ ou $z-2+i = 0$

$z_0 = 3$ ou $z_1 = 3i$ ou $z_2 = 1-2i$ ou $z_3 = 2-i$

$$\boxed{S = \{3 ; 3i ; 1-2i ; 2-i\}}$$

Exercice n°2

10 cubes bleus ; 22 cubes jaunes ; 4 cubes rouges

1/ La probabilité de pouvoir faire le drapeau du Tchad.

2) La probabilité en prenant successivement 3 cubes l'un après l'autre sans remise.

Notons P_3 cet évènement.

Nombre des cas possibles

$$\text{card}\,\Omega = A_{36}^{3} = 36\times 35\times 34 = 42840$$

Nombre des cas favorables

$$A_{10}^{1}\cdot A_{22}^{1}\cdot A_{4}^{1} = 10\times 22\times 4 = 880$$

AN: $P_3 = \dfrac{880}{42840}$

$$\boxed{P_3 = 0,02}$$

Problème

$$f(x) = 1+x-e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$$

I/ 1) calculons

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 1+x-e^{-x} = 1-\infty-\infty = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1+x-e^{-x} = 1+\infty-0 = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+x-e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}+1-\frac{e^{-x}}{x} = -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+1-\frac{e^{-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+1-\frac{1}{xe^{x}}=1$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1}$$

2) Etudions les variations de

$\forall x\in\mathbb{R}$, f est dérivable comme somme des fonctions dérivables et ona:

$$f'(x)=1+e^{-x}$$
$$=1+\frac{1}{e^{x}}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{e^{x}+1}{e^{x}}}$$

$e^{x}+1>0$ et $e^{x}>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)>0 \Rightarrow f \nearrow$

Tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3) (C) courbe de f. Montrons que la droite (D) d'équation $y=x+1$ est asymptote à (C)

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}[1+x-e^{-x}-1-x]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}-e^{-x}=0$$

Alors, $\boxed{y=x+1}$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$

Précisons la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D)

Posons $h(x) = f(x) - y$

$h(x) = -e^{x}$

$h(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) - y < 0$

$\Rightarrow f(x) < y$

$(\mathcal{C}_f)$ est en-dessous de la droite (D).

4) Trouvons l'équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $x = 0$.

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$f'(0) = \frac{e^0+1}{e^0} = 2$$

$$f(0) = 1+0-e^0$$

$$= 1+0-1$$

$$f(0) = 0$$

(T) : $\boxed{y = 2x.}$

Etude de la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (T)

Posons $K(x) = f(x) - y$

$$= 1+x-e^{-x}-2x$$

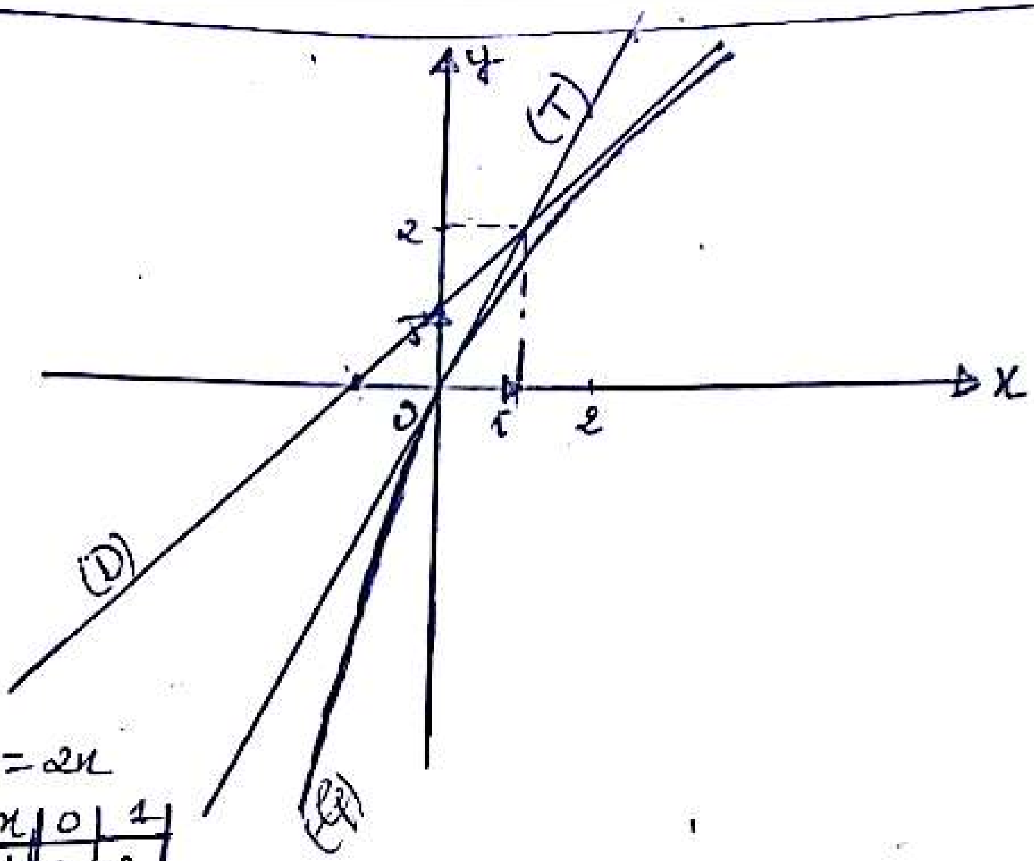
$$= 1-x-e^{-x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, K est dérivable et on a

$$K'(x) = -1 + e^{-x}$$

$$= -1 + \frac{1}{e^x}$$

$$= \frac{-e^x+1}{e^x}$$



T : $y = 2x$

x	0	1
y	0	2

(D) : $y = x+1$

x	0	1
y	1	0

II/ 1) Montrons que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1}

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

f est bijective, elle admet une bijection réciproque notée f^{-1}

2) Traçons le graphe (L) de f^{-1}

$(L) = S_{(\Delta)}(C)$ où $S_{(\Delta)}$ est la symétrie orthogonale d'axe la droite (Δ) : $y = x$

3) Calculons l'aire $A(m)$ de la région $P(m)$ du plan comprise entre la courbe $(\mathcal{L})$ et les droites d'équations $y = x+1$, $y = 0$ et $y = m$, $m > 0$

$$A(m) = \int_0^m (y - f(x))\,dx$$

$$= \int_0^m (x+1-1-x+e^{-x})\,dx$$

$$= \int_0^m (e^{-x})\,dx$$

$$= \left[-e^{-x}\right]_0^m$$

$$\boxed{A(m) = -e^{-m} + 1 \text{ u.a}}$$

$$\lim_{m \to +\infty} A(m) = \lim_{m \to +\infty} -e^{-m} + 1 = 1$$

$$\boxed{\lim_{m \to +\infty} A(m) = 1}$$

Baccalauréat de l'enseignement du second degré Session de juin 2001

Épreuve de mathématiques série D Durée 04 h coefficient 4

Exercice 1

On considère le nombre complexe Z défini par $Z = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$

1- Écrire Z^2 sous forme algébrique.

2- a) Déterminer le module et un argument de Z^2

b) En déduire le module et un argument de Z

3- En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

4- Résoudre dans C l'équation : $\left(\sqrt{3} + 1\right)\cos x + (\sqrt{3} - 1)\sin x = \sqrt{2}$

Exercice 2 les parties I et II sont indépendantes.

I- 1) Déterminer le nombre de possibilités qu'il y a pour que sept personnes puissent s'asseoir sur un banc.

2) Combien de possibilités il y a si deux personnes insistent pour s'asseoir l'une à côté de l'autre ?

II- On prend au hasard 3 ampoules électriques d'un lot de 15 ampoules dont 5 sont défectueuses. Calculer les probabilités pour que :

a) Aucune ampoule ne soit défectueuse.

b) Exactement une ampoule soit défectueuse.

c) Au moins ampoule soit défectueuse

d) Toutes les ampoules soient défectueuses

Problème : on considère la fonction numérique d'une variable réelle x définie par :

$f(x) = 3x - 1 - \frac{x-1}{(x+1)^2}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité graphique : $2cm$)

1- a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathfrak{D}$ de la fonction f.

b) Établir que la courbe $(\mathcal{C})$ admet pour asymptote la droite Δ d'équation $y = 3x - 1$. On montrera que la courbe $(\mathcal{C})$ coupe la droite Δ en un point dont on calculera les coordonnées. On étudiera la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite Δ

c) Déterminer les points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C})$ avec les droites d'équations $y = 0$ et $y = 2$

2- a) Démontrer que f' peut s'écrire sous la forme $f'(x) = \frac{xP(x)}{(x+1)^3}$ où $P(x)$ est un trinôme de second degré à déterminer

b) En déduire les variations de f. Et calculer les images par f des réels : 0; 0,5; 1; 2; 3

c) Tracer $(\mathcal{C})$ avec soin

3- a) déterminer deux réels a et b tels que pour tout x appartenant à $\mathfrak{D}$,

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}$$

b) soit g la fonction numérique, telle que $g(x) = \frac{1-x}{(x+1)^2}$. déterminer une primitive G de g sur $]-1; +\infty[$.

c) calculer en centimètre carrés, l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

4

Correction BAC D 2001

Exercice 1 :

Considérons le nombre complexe $Z = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$.

1- Écrivons Z^2 sous forme algébrique.

On a :

$$Z^2 = \left[\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)\right]^2$$
$$= (\sqrt{3}+1)^2 - (\sqrt{3}-1)^2 + 2i(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) = 4\sqrt{3} + 4i$$

2- a) déterminons le module et un argument de Z^2.

Module de Z^2 : On a : $|Z^2| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = 8$.

Un argument de Z^2 :

Soit θ un argument de Z^2

On a: $\begin{cases} \cos\theta = \frac{4\sqrt{3}}{8} \\ \sin\theta = \frac{4}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \cos\frac{\pi}{6} \\ \sin\theta = \sin\frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

Pour $k = 0$, un argument de Z^2 est $\frac{\pi}{6}$

b) déduisons de la question a), le module et un argument de Z.

Soit r le module de Z et α un argument de Z .

Module de Z : On a : $r^2 = |Z^2| = 8$ d'où $r = 2\sqrt{2}$

Un argument de Z : Par ailleurs, $2\alpha = \theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Or $\cos\theta > 0$ et $\sin\theta > 0$ car $\sqrt{3} + 1 > 0$ et $\sqrt{3} - 1 > 0$

D'où $\alpha = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Car pour $\alpha = \frac{\pi}{12} + (2k+1)\pi \quad k \in \mathbb{Z}$, on a : $\begin{cases} \cos\alpha < 0 \\ \sin\alpha < 0 \end{cases}$.

Ainsi un argument de Z est $\frac{\pi}{12}$

3- Déduisons les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

On a : $Z = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$. D'après la question précédente, $Z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$

D'où

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Et

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

4- Résolvons l'équation

$$(E): \left(\sqrt{3}+1\right)\cos x + (\sqrt{3}-1)\sin x = \sqrt{2}$$

On a :

$$(E) \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}\cos x + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{12}\cos x + \sin\frac{\pi}{12}\sin x = \frac{1}{2}$$

D'où

$$\cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = \cos\frac{\pi}{3}$$

Donc

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{12} - x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \quad ou \\ \dfrac{\pi}{12} - x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \quad ou \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

Soit S l'ensemble solution de (E) :

$$S = \left\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercice 2 :

1- Première partie

1.1- Déterminons le nombre de possibilités qu'il y a pour que sept personnes puissent s'asseoir sur un banc.

Le nombre de places n'étant pas indiqué, on suppose qu'il est égal à sept.

Par ailleurs, une personne déjà assise ne peut plus prendre une autre place.

Nous avons donc un tirage successif sans remise de sept éléments dans sept.

Soit Ω l'univers des événements liés à ce tirage.

On a : $\boldsymbol{Card(\Omega) = A_7^7} = \frac{7!}{(7-7)!} = 7! = 5040$

1.2- Trouvons le nombre de possibilités qu'il y a lorsque deux personnes sont côte à côte.

Soit Ω' l'évènement « deux personnes sont cote à cote »,

Appelons les deux personnes P_1 et P_2 on a :

À chaque position de P_1 , correspond deux positions de P_2 sauf aux deux extrémités du banc où P_2 aura une seule possibilité. Donc :

$Card(\Omega') = (5 \times 2 + 2)A_5^5 = 12 \times \frac{5!}{(5-5)!} = 12 \times 5! = 1440$

2- Deuxième partie

Soit E l'évènement : « tirer simultanément au hasard 03 ampoules dans un lot de 15 ».

On a : $Card(E) = C_{15}^3 = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{15!}{3!12!} = 455$

a) Soit(E_a) l'évènement : « tirer simultanément au hasard 03 ampoules non défectueuse »

On a : $Card(E_a) = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$

Ainsi la probabilité de l'évènement (E_a) est $P_a = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$

b) Soit(E_b) l'évènement : « tirer au hasard 03 ampoules 01 exactement étant défectueuse »

On a : $Card(E_b) = C_5^1 \times C_{10}^2 = \frac{5!}{1!4!} \times \frac{10!}{2!8!} = 225$

Ainsi la probabilité de l'évènement (E_b) est $P_b = \frac{225}{455} = \frac{45}{91}$

c) Soit(E_c) l'évènement : « tirer au hasard 03 ampoules au moins une étant défectueuse »

On a : $Card(E_c) = C_5^1 \times C_{10}^2 + C_5^2 \times C_{10}^1 + C_5^3 = 335$

Ainsi la probabilité de l'évènement (E_c) est $P_C = \frac{335}{455} = \frac{67}{91}$

d) Soit(E_d) l'évènement : « tirer au hasard 03 ampoules toutes défectueuses »

On a : $Card(E_d) = C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$

Ainsi la probabilité de l'évènement (E_d) est $P_a = \frac{10}{455} = \frac{2}{91}$

Problème :

Considérons la fonction numérique f définie par : $f(x) = 3x - 1 - \frac{x-1}{(x+1)^2}$ et (C)sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité graphique : $2cm$)

1-a) Déterminons l'ensemble de définition $\mathfrak{D}$ de la fonction f.

$f(x)$ existe si et seulement si $(x+1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Ainsi $\mathfrak{D} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

1-b) Établissons que la courbe (C) admet pour asymptote la droite Δ d'équation $y = 3x - 1$.

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$,

On a :

$f(x) - y = 3x - 1 - \frac{x-1}{(x+1)^2} - (3x-1) = -\frac{x-1}{(x+1)^2}$ et

$$\lim_{x\to-\infty} -\frac{x-1}{(x+1)^2} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

De même,

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{x-1}{(x+1)^2} = 0$$

Donc la droite $\Delta: y = 3x - 1$ est asymptote oblique à la courbe (C) aux voisinages de $+\infty$ et de$-\infty$.

Déterminons l'intersection de la droite Δ avec (C). Pour cela on doit résoudre l'équation $f(x) = y$.

Pour $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$,

$f(x) = y \Leftrightarrow f(x) - y = 0 \Leftrightarrow -\frac{x-1}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $f(1) = 2$

D'où l'intersection de la droite Δ avec (C) est le point A tel que $A\binom{1}{2}$

Étudions la position de la droite Δ par rapport à (C). Pour cela nous allons chercher le signes de $f(x) - y$ lorsque x vari dans $\mathfrak{D}$.

On a: $f(x) - y = -\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{(x+1)^2}$. Le signe de $f(x) - y$ est celui de $1 - x$ car pour tout $x \in \mathfrak{D}$, on a : $(x+1)^2 > 0$..

Il ressort que :

- Pour $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 1[$, (C) est au dessus de la droite Δ
- pour $x \in]1; +\infty[$, (C) est en dessous de la droite Δ
- pour $x = 1$, (C) est confondue à la droite Δ

1-c) Déterminons l'intersection de la courbe (C) avec la droite d'équations $y = 0$

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$, On a :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 - \frac{x-1}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (3x-1)(x+1)^2 - (x-1) = 0 \Leftrightarrow 3x^3 + 5x^2 = 0$$

D'où $x = 0$ ou $x = -\frac{5}{3}$.

L'intersection de la courbe $(\mathcal{C})$ avec la droite d'équations $y = 0$ est les points $A\binom{-5/3}{0}$ et le centre du repère c'est-à-dire $O\binom{0}{0}$.

Déterminons l'intersection de la courbe $(\mathcal{C})$ avec la droite d'équations $y = 2$

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.

On a: $f(x) = 2 \Leftrightarrow 3x - 1 - \frac{x-1}{(x+1)^2} = 2 \Leftrightarrow 3x - 3 - \frac{x-1}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)[3(x+1)^2 - 1] = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 6x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \; ou \; x = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \; ou \; x = -1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

L'intersection de la courbe $(\mathcal{C})$ avec la droite d'équations $y = 2$ est donc les points $B\binom{1}{2}$; $C\begin{pmatrix} -1-\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix} -1+\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 2 \end{pmatrix}$.

2- a) Démontrons que f' peut s'écrire sous la forme $f'(x) = \frac{xP(x)}{(x+1)^3}$ où $P(x)$ est un trinôme de second degré à déterminer.

f est continue et dérivable sur $\mathfrak{D}$ comme fonction rationnelle ; et pour tout $x \in \mathfrak{D}$, on a :

$$f'(x) = 3 - \frac{(x+1)^2 - 2(x+1)(x-1)}{(x+1)^4} = \frac{3(x+1)^4 - (x+1)^2 + 2(x+1)(x-1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{x(x+1)(3x^2+9x+10)}{(x+1)^4} = \frac{x(3x^2+9x+10)}{(x+1)^3}$$

En posant $P(x) = 3x^2 + 9x + 10$, on obtient

$$f'(x) = \frac{xP(x)}{(x+1)^3}$$

b) Déduisons les variations de f.

L'équation $P(x) = 0$ n'admettant pas de solution, car $\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times 10 = -39$,

Le signe de $f'(x)$ ne dépend que de celui de x et de celui de $x + 1$. D'où le tableau de signe et le tableau de variation suivants :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x	$-$	$-$	$+$	
$x+1$	$-$	$+$	$+$	
$f'(x)$	$+$	‖ $-$	$+$	

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$-$		$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

c)

Retrouver $(\mathcal{C})$ à la page suivante

3- a) déterminons deux réels a et b tels que pour tout x appartenant à $\mathfrak{D}$, on ait :

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$

Soit $x \neq 1$; a et b deux nombres réels.

On a : $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} = \frac{a(x+1)+b}{(x+1)^2} = \frac{ax+a+b}{(x+1)^2}$. D'où par identification des coefficients, on a :

24

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}.$$

3- b) soit g la fonction numérique, telle que $g(x) = \frac{1-x}{(x+1)^2}$. déterminons une primitive G de g sur $]-1;+\infty[$

On a : $g(x) = -\frac{x-1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} = -\frac{(x+1)'}{x+1} - 2\frac{-(x+1)'}{(x+1)^2}$ de plus $\forall x \in]-1;+\infty[$, on a : $x + 1 > 0$. D'où la famille des primitives de g sur $]-1;+\infty[$ est de la forme

$$G_k = -\ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + k \quad k \in \mathbb{R}\ .$$

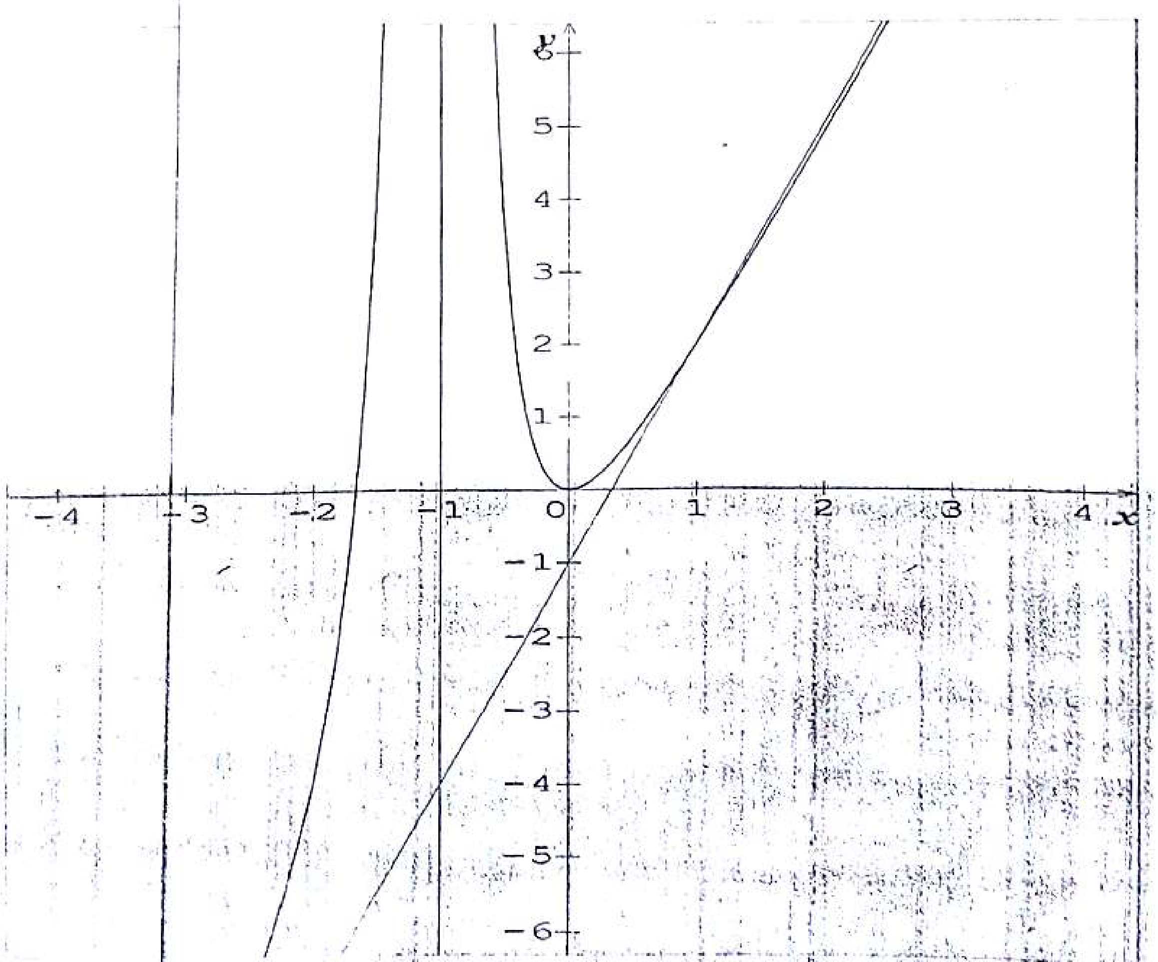
Ainsi, pour $k = 0$ une primitive de g sur $]-1;+\infty[$ est $G(x) = -\ln(x+1) - \frac{2}{x+1}$

3 c) calculons en centimètre carrés, l'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

Soit A l'aire de ce domaine. $(\mathcal{C})$ étant au dessus de la droite Δ dans $]0;1[$,

On a :

$$A = \int_0^1 (f(x) - y)dx \times 4cm^2 = \int_0^1 g(x) = [G(x)]_0^1 \times 4cm^2 = [G(1) - G(0)] \times 4cm^2$$
$$= [-\ln 2 - 1 + \ln 1 + 2] \times 4cm^2 = (1 - \ln 2)4cm^2 = 4\ln\left(\frac{e}{2}\right)cm^2 \approx 1{,}227cm^2$$



26

ABAKAR MAHAMAT OUMAR

Lycée Etoile Polaire

Baccalauréat de l'enseignement du second degré — Session de juin 2002

Épreuve de mathématiques — série D — Durée 04 — coefficient 4

Exercice 1 :

Une famille comprend 04 enfants. La probabilité pour qu'un enfant soit un garçon est de $\frac{1}{2}$. Le nombre de garçons de la famille est ainsi une variable aléatoire X pouvant prendre les valeurs 0; 1; 2; 3; 4. On demande de déterminer :

1- La loi de probabilité de X.
2- L'espérance mathématique de X.
3- La variance et l'écart type de X

Exercice 2

Soit la fonction f telle que $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

1) Calculer $f(-1)$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   a) $2x^3 + 5x^2 + 5 - 2 = 0$
   b) $2\cos^3 x + 5\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$
   c) $2(\ln x)^3 + 5(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$
   d) $2e^{2x} + 5e^{x} + 1 - 2e^{-x} = 0$

Exercice 3

On considère par j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ [illegible]

1. Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $u = 4(\sqrt{3} + j)$
2. Calculer les nombres z_1 et z_2 solutions de l'équation $z^2 = u$
   a) En utilisant les formes trigonométriques de z et de u
   b) En utilisant les formes algébriques de u et de z. On pourra remarquer que
   $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$ *et* $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$
   c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

Problème :

On considère la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = \frac{x^3+x^2-2x-3}{x^2-3}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que la fonction dérivée de f est définie par : $f'(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-6)}{(x^2-3)^2}$
2. Étudier les variations de f
3. Démontrer qu'il existe un réel a tel que pour tout x de l'ensemble de définition,
$$f(x) = x + 1 + \frac{ax}{x^2 - 3}$$
4. Démontrer que le point $A(0\,,1)$ est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C})$
5. Montrer $(\mathcal{C})$ possède une asymptote oblique dont on déterminera l'équation et préciser et la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
6. Soit (D) le domaine plan limité par $(\mathcal{C})$, l'asymptote oblique, la droite d'équation $x = 2$ et la droite d'équation $x = 3$. Calculer l'aire de (D).

5

Correction BAC D 2002

Exercice 1 :

Il s'agit de la loi binomiale :

1) Pour 0 garçon, on a : $P(0) = C_4^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
2) Pour 1 garçon, on a : $P(1) = C_4^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16}$
3) Pour 2 garçon, on a : $P(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}$
4) Pour 3 garçon, on a : $P(3) = C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4}{16}$
5) Pour 4 garçon, on a : $P(4) = C_4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}$

6) La loi de probabilité de X est :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

7) L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = \sum_{i=0}^{4} x_i p_i = \frac{0 \times 1 + 1 \times 4 + 2 \times 6 + 3 \times 4 + 4 \times 1}{16} = 2$$

8) **La variance de X est :**

$$V(X) = \sum_{i=0}^{4} (x_i - E(X))^2 p_i = \frac{1}{16}(-2)^2 + \frac{4}{16}(-1)^2 + \frac{6}{16}(0)^2 + \frac{4}{16}(1)^2 + \frac{1}{16}(2)^2 = 1$$

L'écart type de X est

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1$$

Exercice 2 :

Soit la fonction f telle que

$$f(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$$

1) Calculons $f(-1)$

On a : $f(-1) = 0$

2) Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $2x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0$

$(x + 1)$ est un facteur de $f(x)$ car $f(-1) = 0$. Par division euclidienne ou par identification des coefficients, on obtient :

$$2x^3 + 5x^2 + x - 2 = (x + 1)(2x^2 + 3x - 2).$$

D'où

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \; ou \; 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \;\; ou \;\; x = -2 \; ou \;\; x = \frac{1}{2}.$$

Soit S l'ensemble solution de cette équation :

$$S = \left\{-2; -1; \frac{1}{2}\right\}$$

b) (E_b): $2\cos^3 x + 5\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$

Posons $X = \cos x$: (E_b) devient : $3X^3 + 5X^2 + X - 2 = 0$. et d'après la question 2-a), les solutions de $3X^3 + 5X^2 + X - 2 = 0$ sont : $X_1 = -2$; $X_2 = -1$; $X_3 = \frac{1}{2}$

27

- Pour $\cos x = X_1 = -2$, il n y a pas de solution.
- Pour $\cos x = X_2 = -1$, on a : $\cos x = \cos \pi \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
- pour $\cos x = X_3 = \frac{1}{2}$, on a :

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Soit S_b l'ensemble solution de (E_b) on a :

$$S_b = \left\{\pi + 2k\pi \ ; \ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ; \ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

c) (E_c): $2(\ln x)^3 + 5(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$. Pour $x > 0$,

Posons $Y = \ln x$: (E_c) devient : $3Y^3 + 5Y^2 + Y - 2 = 0$. et d'après la question 2-a), les solutions de $3Y^3 + 5Y^2 + Y - 2 = 0$ sont : $Y_1 = -2$; $Y_2 = -1$; $Y_3 = \frac{1}{2}$

- Pour $\ln x = Y_1 = -2$ on a : $x_1 = e^{-2}$
- Pour $\ln x = Y_2 = -1$ on a : $x_2 = e^{-1}$
- Pour $\ln x = Y_3 = \frac{1}{2}$ on a : $x_3 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Soit S_c l'ensemble solution de (E_c) on a :

$$S_c = \{ e^{-2} \ ; \ e^{-1} \ ; \ \sqrt{e} \}$$

d) (E_d): $2e^{2x} + 5e^x + 1 - 2e^{-x} = 0$

On a :

$$2e^{2x} + 5e^x + 1 - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x(2e^{2x} + 5e^x + 1 - 2e^{-x}) = 0 \times e^x \Leftrightarrow 2e^{3x} + 5e^{2x} + e^x - 2 = 0$$

Posons $Z = e^x$: (E_d) devient : $3Z^3 + 5Z^2 + Z - 2 = 0$. et d'après la question 2-a), les solutions de $3Z^3 + 5Z^2 + Z - 2 = 0$ sont : $Z_1 = -2$; $Z_2 = -1$; $Z_3 = \frac{1}{2}$

- Pour $e^x = Z_1 = -2$, il n y a pas de solution car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $e^x > 0$
- Pour $e^x = Z_2 = -1$, il n y a pas de solution car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $e^x > 0$
- Pour $e^x = Z_3 = \frac{1}{2}$ on a : $x_3 = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

Soit S_d l'ensemble solution de (E_d) on a : $S_d = \{-\ln 2\}$

Exercice 3 :

Considérons par j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$

1) Déterminons le module et l'argument du nombre complexe $u = 4(\sqrt{3} + j)$

On a $j = 1e^{\frac{i\pi}{2}} \Rightarrow j = i$ d'où $u = 4(\sqrt{3} + i)$.

Donc le module de u est $|u| = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = 8$

Soit θ un argument de u on a : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{4\sqrt{3}}{8} \\ \sin\theta = \frac{4}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \cos\frac{\pi}{6} \\ \sin\theta = \sin\frac{\pi}{6} \end{cases}$

D'où $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Pour $\theta \in]-\pi; \pi]$ l'argument de u est $\theta = \frac{\pi}{6}$

2) Calculons les nombres z_1 et z_2 solutions de l'équation $z^2 = u$

a) En utilisant les formes trigonométriques de z et de u

Posons $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $r > 0$

28

On a : $z^2 = u \Leftrightarrow z^2 = r^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 8 \\ 2\alpha = \frac{\pi}{6} \quad 2k\pi \quad k \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2\sqrt{2} \\ \alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Pour $-\pi < \alpha \leq \pi$, $k \in \{-1; 0\}$

- Pour $k = 0$, on a : $z_1 = 2\sqrt{2}\left(2\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$
- Pour $k = -1$, on a : $z_2 = 2\sqrt{2}\left(2\cos\frac{-11\pi}{12} + i\sin\frac{-11\pi}{12}\right)$

b) En utilisant les formes algébriques de u et de z.

Posons $z = a + ib$ où a et b sont des nombres réels à déterminer.

On a : $z^2 = u \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 4\sqrt{3} & (1) \\ 2ab = 4 & (2) \\ a^2 + b^2 = 8 & (3) \end{cases}$ en sommant (1) et (3), on obtient $2a^2 = 8 + 4\sqrt{3}$

D'où $a = (\sqrt{3} + 1)$ ou $a = -(\sqrt{3} + 1)$

- Pour $a = (\sqrt{3} + 1)$ on a $b = (\sqrt{3} - 1)$, d'où $z_1 = (1 + \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} - 1)$
- Pour $a = (-\sqrt{3} - 1)$ on a $b = (1 - \sqrt{3})$ d'où $z_2 = (-\sqrt{3} - 1) + i(1 - \sqrt{3})$

c) Déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

On a : $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ d'où $\cos\frac{\pi}{12} > 0$ et $\sin\frac{\pi}{12} > 0$. Donc les questions précédentes nous permettent d'écrire : $2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{12}} = (1 + \sqrt{3}) + i(\sqrt{3} - 1)$

D'où $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Problème :

Considérons la fonction numérique d'une variable réelle définie par : $f(x) = \frac{x^3+x^2-2x-3}{x^2-3}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Démontrons que la fonction dérivée de f est définie par : $f'(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-6)}{(x^2-3)^2}$

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\sqrt{3}$ *et* $x \neq \sqrt{3}$.
D'où $\mathcal{D}_f =]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[$.
f est continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f$ comme fonction rationnelle ; et quelque soit $x \in \mathcal{D}_f$, on a :

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2x - 2)(x^2 - 3) - 2x(x^3 + x^2 - 2x - 3)}{(x^2 - 3)^2} = \frac{x^4 - 7x^2 + 6}{(x^2 - 3)^2}.$$

en posant $X = x^2$, $x^4 - 7x^2 + 6$ devient : $X^2 - 7X + 6$ et : $X^2 - 7X + 6 = (X - 1)(X - 6)$. En remplaçant X par x^2, on obtient :

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 6)}{(x^2 - 3)^2}$$

2. Étudions les variations de f

Le signe de $f'(x)$ ne dépend que de celui de $(x^2 - 1)(x^2 - 6)$ car pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a : $(x^2 - 3)^2 > 0$. Par ailleurs $(x^2 - 1)(x^2 - 6) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}) = 0$

D' où les tableaux de signe et de variation suivants :

x	$-\infty$; $-\sqrt{6}$	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	$+\infty$
$x+\sqrt{6}$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-\sqrt{6}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	‖ $-$	$+$	$-$	‖ $-$	$+$

D'autre part,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\ +\infty;$$

$$\lim_{x\to-(\sqrt{3})^-} f(x) = -\infty; \qquad \lim_{x\to-(\sqrt{3})^+} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x\to(\sqrt{3})^-} f(x) = -\infty \quad et \quad \lim_{x\to(\sqrt{3})^+} f(x) = +\infty$$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	‖	$-$		$+$		$-$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$			$f(-\sqrt{6})$		‖ $+\infty$				$f(1)$		‖ $+\infty$				$+\infty$
		↗		↘	‖	↘		↗		↘	‖	↘		↗	
	$-\infty$				$-\infty$ ‖		$f(-1)$				$-\infty$ ‖		$f(\sqrt{6})$		

3) Démontrons qu'il existe un réel a tel que pour tout x de $\mathfrak{D}_f$,

$$f(x) = x + 1 + \frac{ax}{x^2 - 3}$$

Quel que soit $x \in \mathfrak{D}_f$ trouvons $a \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) = x + 1 + \frac{ax}{x^2-3}$

On a : $x + 1 + \frac{ax}{x^2-3} = \frac{(x+1)(x^2-3)+ax}{x^2-3} = \frac{x^3+x^2+(a-3)x-3}{x^2-3}$. Par identification des coefficients,

$(a-3) = -2 \Leftrightarrow f(x) = x + 1 + \frac{ax}{x^2-3}$. Donc $a = -5$. Ainsi : $f(x) = x + 1 + \frac{-5x}{x^2-3}$

4) Démontrons que le point $A(0,1)$ est un centre de symétrie pour $(\mathcal{C})$

Pour cela, il suffit de démontrer que pour tout $x \in \mathfrak{D}_f$ on a : $-x \in \mathfrak{D}_f$ et $f(x-0) + f(0-x) = 2 \times 1$

Soit $x \in \mathfrak{D}_f$ on a : $-x \in \mathfrak{D}_f$ et

$$f(x-0) + f(0-x) = f(x) + f(-x) = x - x + 1 + 1 + \frac{ax - ax}{x^2 - 3} = 2$$

Donc $A\binom{0}{1}$ est le centre de symétrie de $(\mathcal{C})$

5) Montrons que $(\mathcal{C})$ possède une asymptote oblique et déterminons son équation.

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + 1 + \frac{-5x}{x^2-3}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{5x}{x^3 - 3x}\right) = 1$$

De même,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

Donc $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique d'équation $y = x + b$ avec

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{5x}{x^2-3} = 1$$

Ainsi Δ: $y = x + 1$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$

<u>Étude de la position relative de $(\mathcal{C})$ avec Δ :</u>

Étude du signe de $f(x) - y$.

On a : $\forall x \in \mathfrak{D}_f$, $f(x) - y = -\frac{5x}{x^2-3}$ d'où le tableau de signe suivant

x	$-\infty$ $-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$-5x$	+	+	−	−
$x^2 - 3$	+	−	−	+
$f(x) - y$	+	‖ −	+	‖ −

Donc :

- pour $x \in]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]0; \sqrt{3}[$, $(\mathcal{C})$ est au dessus de Δ
- Pour $x \in]-\sqrt{3}; 0[\cup]\sqrt{3}; +\infty[$, $(\mathcal{C})$ est en dessous de
- Pour $x = 0$, $(\mathcal{C})$ est égal à Δ

6) Soit (D) le domaine plan limité par $(\mathcal{C})$, l'asymptote oblique Δ, la droite d'équation $x = 2$ et la droite d'équation $x = 3$. Calculons l'aire de (D).

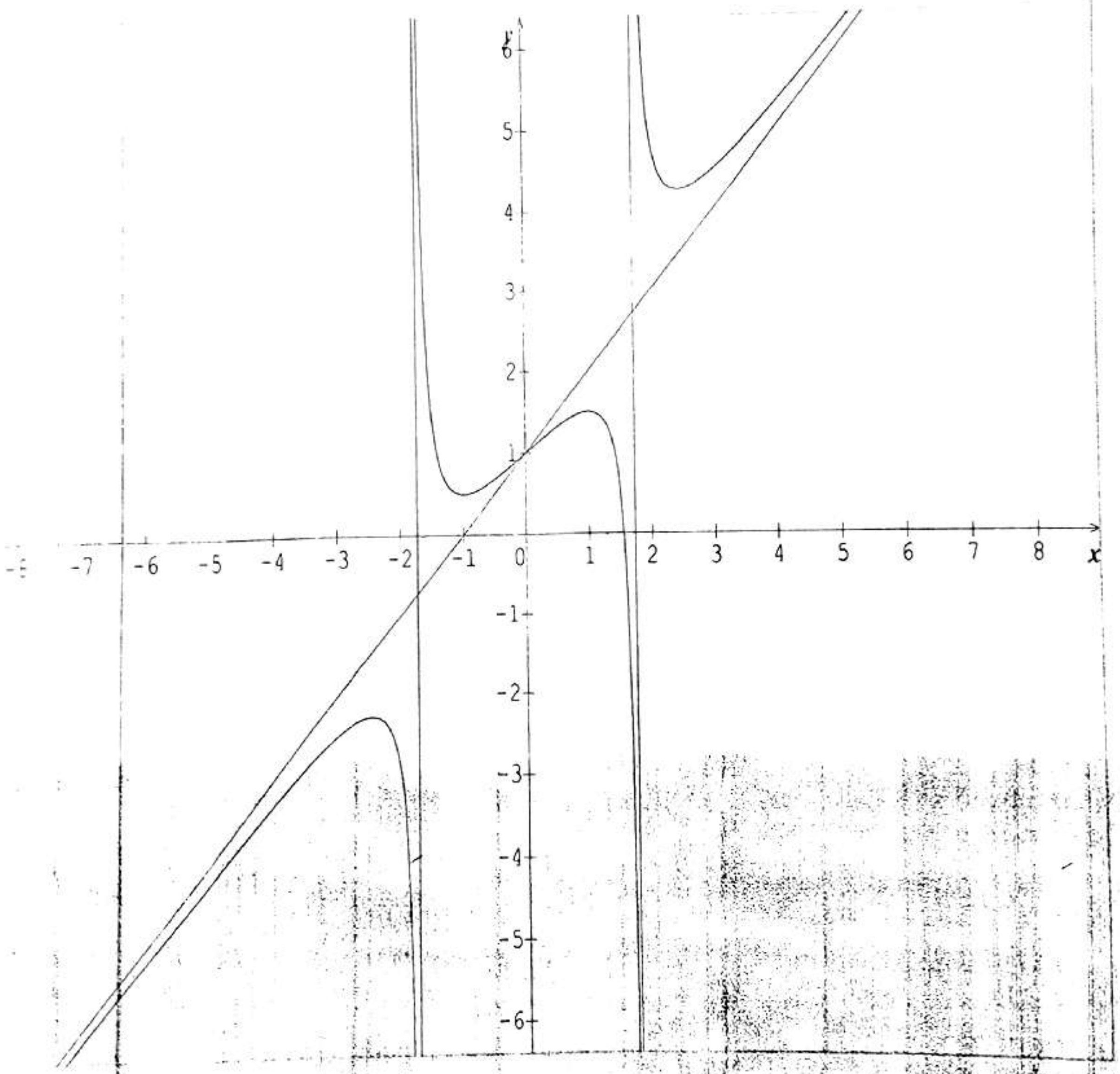
Soit A l'aire de ce domaine

$$A = -\left(\int_2^3 (f(x) - y)dx\right) = \int_2^3 \frac{5x}{x^2-3}dx = 5/2\int_2^3 \frac{2x}{x^2-3}dx$$

Donc $A = \frac{5}{2}[\ln(x^2-3)]_2^3 = \frac{5}{2}(\ln 6 - \ln 1) = \frac{5}{2}\ln 6$

NB : lorsque les unités graphiques sont données, on multiplie le résultat par l'unité d'aire.

Bien que n'étant pas demandé, la représentation graphique $(\mathcal{C})$ de f est :



Baccalauréat de l'enseignement du second degré Session de juin 2003

Épreuve de mathématiques série D Durée 04 h coefficient 4

Exercice 1 :

Un questionnaire à choix multiple (QCM) est constitué de 8 questions. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées et une seule d'entre elle est exacte. Un candidat répond au hasard.

1. Déterminer le nombre de réponses possible à ce (QCM).
2. a) Déterminer le nombre de cas où les réponses du candidat aux 6 premières questions sont exactes et aux deux autres fausses
   b) Calculer la probabilité pour que le candidat réponde correctement à exactement 6 questions.
3. Quelle est la probabilité pour que le candidat soit reçu si on lui demande de donner au moins 6 réponses justes ?

Exercice 2 :

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = 4e^{2x} - 4e^{x} - 3; \qquad g(x) = 4\cos^2 x + 4\sin x - 1$$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes : $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$
2) Déterminer les primitives de f et de g

Exercice 3 :

Résoudre dans C l'équation $9z^2 + 12\sqrt{3}z + 16 = 0$

1) Calculer le module et l'argument des solutions z_1 et z_2 de cette équation. (On note z_1 la solution dont l'argument est compris entre 0 et π
2) calculer $\frac{z_1}{z_2}$ puis $\frac{z_1}{z_2} + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^5$

Problème

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + e^{-x}$

1) Étudier les variations de f
2) En vue de construire la courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthonormé dont l'unité mesure $2cm$,

a) Montrer (C) possède une asymptote (x tendant vers $+\infty$) en donner une équation et préciser la position de (C)par rapport à cette asymptote.

b) Construire les points de (C) d'abscisses -1 et 0 et les tangentes à (C) en ces points.

3) Tracer la courbe (C)
4) On considère $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par (C) et par les droites d'équations : $y = x$; $x = 0$; et $x = \lambda$ où λ est un paramètre réel positif.

a) Calculer $A(\lambda)$

b) L'aire $A(\lambda)$ tend – elle vers une limite lorsque λ tend vers l'infini ? Si oui laquelle ?

Correction BAC D 2003

Exercice 1 :

Un questionnaire à choix multiple (QCM) est constitué de 8 questions. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées et une seule d'entre elle est exacte. Un candidat répond au hasard.

1. Déterminons le nombre de réponses possible à ce (QCM).

Indépendamment, chacune des 8 questions a quatre possibilités de réponses que nous supposons numérotées de 1 à 4. Nous avons donc un tirage successif avec remise de 8 éléments dans 4.
Soit Ω l'ensemble des réponses possibles.
On a : $Card(\Omega) = 4^8 = 65536$

2. a) Soit A l'évènement « les réponses du candidat aux 6 premières questions sont exactes et aux deux autres fausses. »

On a : pour une question donnée, une seule réponse est vraie donc les trois autres sont fausses.
Ainsi $Card(A) = 1^6 \times 3^2 = 9$

b-) Soit B l'évènement « le candidat répond correctement à exactement 6 questions ».
Le nombre de combinaisons pour que 06 questions sur 08 soient bien répondues est :

$$C_8^6 = \frac{8!}{2!\,6!} = 28$$

D'où $Card(B) = 28 \times 1^6 \times 3^2 = 252$

Ainsi la probabilité de l'évènement B est $P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{252}{65536} = \frac{63}{16384}$

3. Soit C l'évènement « le candidat donne au moins 6 réponses justes. »

- Pour exactement 06 réponses justes on a trouvé 252 possibilités ;
- Pour exactement 07 réponses justes on a : $C_8^7 \times 1^7 \times 3^1 = \frac{8!}{7!} \times 3 = 24$
- Pour exactement 08 réponses justes on a : $C_8^8 \times 1^8 \times 3^0 = 1$

Ainsi $Card(C) = 252 + 24 + 1 = 277$; donc la probabilité de l'évènement C est : $P(C) = \frac{277}{65536}$.

Exercice 2 :

Considérons les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = 4e^{2x} - 4e^x - 3; \qquad g(x) = 4\cos^2 x + 4\sin x - 1$$

1) Résolvons dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes : $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$

- Résolution de $f(x) = 0$.

Posons : $X = e^x$; $f(x) = 0$ devient : $4X^2 - 4X - 3 = 0$.

D'où $\Delta = 64$ et les solutions l'équation $4X^2 - 4X - 3 = 0$ sont : $X_1 = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{3}{2}$.

En remplaçant X_1 par e^x dans $X_1 = -\frac{1}{2}$ on obtient $e^x = -\frac{1}{2}$; ce qui est impossible car $e^x > 0$

En remplaçant X_2 par e^x dans $X_2 = \frac{3}{2}$ on obtient $e^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \ln e^x = \ln\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \ln\frac{3}{2}$.

Soit S_f l'ensemble solution de $f(x) = 0$ $S_f = \left\{\ln\frac{3}{2}\right\}$

- Résolution de $g(x) = 0$.

On a : $g(x) = 0 \Leftrightarrow 4(1 - \sin^2 x) + 4\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\sin^2 x - 4\sin x - 3 = 0$.

En posant $Y = \sin x$, on obtient $4Y^2 - 4Y - 3 = 0 \Leftrightarrow Y_1 = -\frac{1}{2}$ et $Y_2 = \frac{3}{2}$.

En remplaçant Y_1 par $\sin x$ dans $Y_1 = -\frac{1}{2}$ on obtient $\sin x = -\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

En remplaçant Y_2 par $\sin x$ dans $Y_2 = \frac{3}{2}$ on obtient $\sin x = \frac{3}{2}$; ce qui est impossible car $-1 \leq \sin x \leq 1$

33

Soit S_g l'ensemble solution de $g(x) = 0$ on a : $S_g = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) Déterminons les primitives des fonctions $f(x) = 4e^{2x} - 4e^{x} - 3$; $g(x) = 4\cos^2 x + 4\sin x - 1$

Primitive de f :

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ ona : $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow F(x) = \frac{4}{2}e^{2x} - 4e^{x} - 3x + c \quad c \in \mathbb{R}$

Donc pour $c = 0$, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est : $F(x) = 2e^{2x} - 4e^{x} - 3x$

Primitive de g : $g(x) = 4\cos^2 x + 4\sin x - 1$

On a :

$$g(x) = 4\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 + 4\sin x - 1 = e^{2ix} + 2e^{ix-ix} + e^{-2ix} + 4\sin x - 1$$
$$= 2\cos(2x) + 4\sin x + 1$$

Soit G une primitive de g sur $\mathbb{R}$. On a :

$$G'(x) = g(x) \Leftrightarrow G(x) = \sin 2x - 4\cos x + x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Pour $c = 0$, une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est $G(x) = \sin 2x - 4\cos x + x$

Exercice 3 :

1) Résolvons dans C l'équation (E): $9z^2 + 12\sqrt{3}z + 16 = 0$

On $\Delta = \left(12\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 16 \times 9 = -144$. Les racines de Δ sont $\delta_1 = 12i$ et $\delta_2 = -12i$

Ainsi les solutions de (E) sont : $z_1 = \frac{-12\sqrt{3}+12i}{18}$ et $z_2 = \frac{-12\sqrt{3}-12i}{18}$

D'où $z_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3}i$ et $z_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3}i$

Soit S l'ensemble solution de l'équation (E) ; $S = \left\{-\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}i\ ;\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3}i\right\}$

Le choix de z_1 est justifié par le fait que dans $]0;\pi[$, le sinus est positif.

2) Calculons le module et l'argument des solutions z_1 et z_2 de cette équation. (On note z_1 la solution dont l'argument est compris entre 0 et π

On a : $|z_1| = \sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{4}{3}$ et $|z_2| = \sqrt{\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{4}{3}$

Recherche d'un argument de z_1 :

Soit θ_1 un argument de z_1 on a :

$$\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{4}{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta_1 = \cos\dfrac{5\pi}{6} \\ \sin\theta_1 = \sin\dfrac{5\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \theta_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Donc pour $k = 0$, un argument de z_1 est $\theta_1 = \frac{5\pi}{6}$.

Recherche d'un argument de z_2 :

Soit θ_2 un argument de z_2 on a :

$$\begin{cases}\cos\theta_2 = \dfrac{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{4}{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_2 = \dfrac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = -\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\theta_2 = \cos -\dfrac{5\pi}{6} \\ \sin\theta_2 = \sin -\dfrac{5\pi}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \theta_2 = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Donc pour $k = 0$, un argument de z_2 est $\theta_2 = -\frac{5\pi}{6}$.

3) Calcul de : $\frac{z_1}{z_2}$

Calcul de $\frac{z_1}{z_2}$

D'après la question précédente,

$$z_1 = \frac{4}{3}e^{\frac{i5\pi}{6}} \; et \; z_2 = \frac{4}{3}e^{-\frac{i5\pi}{6}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{4}{3}e^{\frac{i5\pi}{6}}}{\frac{4}{3}e^{-\frac{i5\pi}{6}}} = e^{\frac{i5\pi}{3}}$$

Calcul de : $\frac{z_1}{z_2} + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^5$

D'après ce qui précède,

$$\frac{z_1}{z_2} + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^5 = e^{\frac{i5\pi}{3}} + \left(e^{\frac{i5\pi}{3}}\right)^5 = e^{\frac{i5\pi}{3}} + e^{\frac{i25\pi}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}} + e^{\frac{i\pi}{3}} = 2\cos\frac{\pi}{3}$$

Problème

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + e^{-x}$

1. Étudions les variations de f

- Calcul des limites :

- Limite en $-\infty$: posons $X = -x$. On obtient :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty} e^X - X = \lim_{X\to+\infty} X\left(\frac{e^X}{X} - 1\right) = : \lim_{x\to-\infty} \frac{Xe^X}{X} = \lim_{x\to-\infty} e^X = +\infty$$

- Limite en $+\infty$

On a :

$$: \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = +\infty$$

- Dérivée et sens de variation de f

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Et, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x + e^{-x})' = 1 - e^{-x}$

Étude du signe de $f'(x)$:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = \ln 1 = 0$

D'où les tableaux de signe et de variations suivants :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

35

2. En vue de construire la courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans un repère orthonormé d'unité ($2cm$),

a) Montrons $(\mathcal{C})$ possède une asymptote (x tendant vers $+\infty$) et donnons en une équation.

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{e^{-x}}{x})=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x}=1$$

Donc $(\mathcal{C})$ admet pour asymptote oblique en $-\infty$ la droite Δ d'équation $y=x+b$ avec

$$: \ b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$$

D'où $(\mathcal{C})$ admet pour asymptote la droite Δ: $y=x$

Précisons la position de $(\mathcal{C})$par rapport à cette asymptote.

On a : $f(x)-y=e^{-x}$ et, quelque soit $x\in\mathbb{R}$, $e^{-x}>0$ donc $(\mathcal{C})$ est toujours au dessus de Δ

b) On a : $f(-1)=e-1$ et $f(0)=1$

L'équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisses -1 est :

$$y=(f'(-1))(x+1)+f(-1)\Leftrightarrow y=(1-e)(x+1)-1+e\Leftrightarrow y=(1-e)x$$

L'équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisses 0 est

$$y=(f'(0))(x-0)+f(0)\Leftrightarrow y=(1-1)x+1\Leftrightarrow y=1$$

c) Représentation de la courbe $(\mathcal{C})$

Voir ci-dessous.

3. Soit $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par $(\mathcal{C})$ et par les droites d'équations : $y=x$; $x=0$; et $x=\lambda$ où λ est un paramètre réel positif.

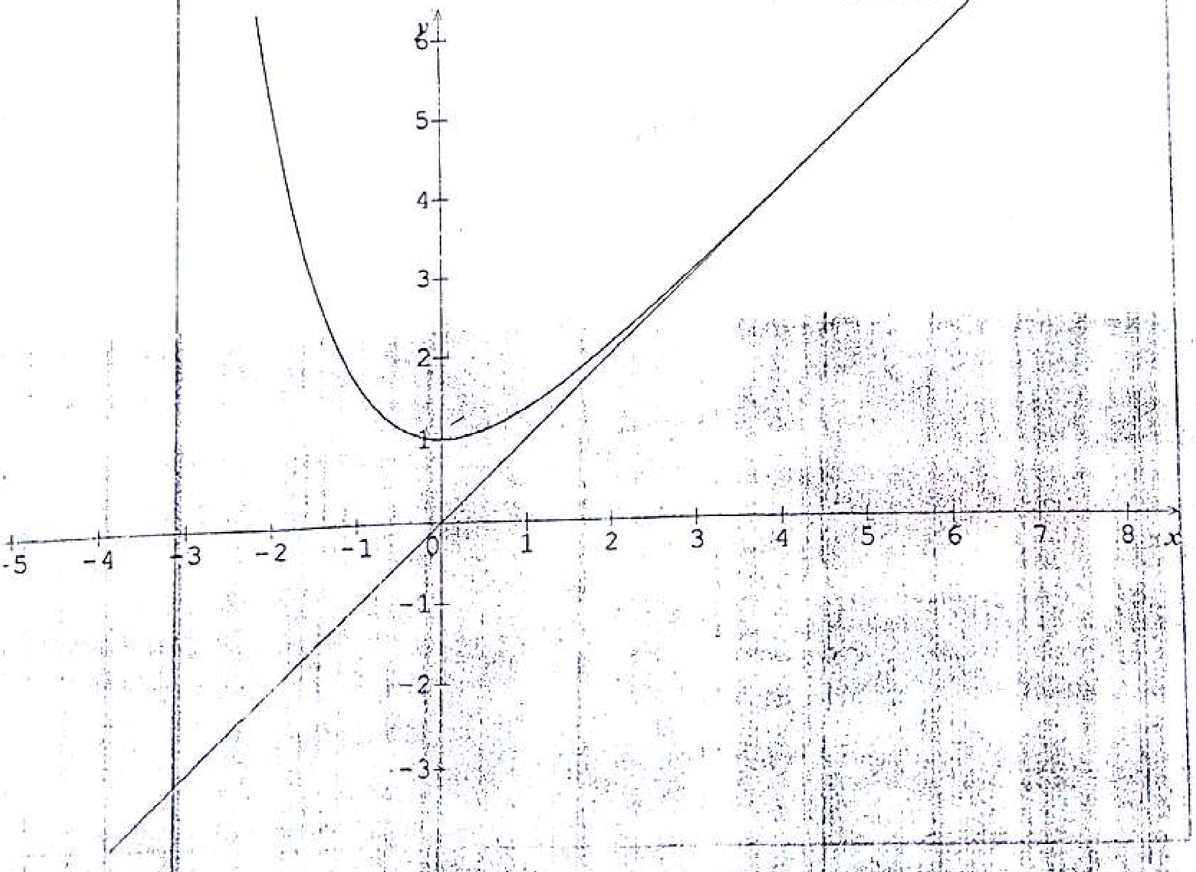
a) Calcule de $A(\lambda)$

Ici l'unité d'aire est $u=4cm^2$ et

$$A(\lambda)=u\int_0^{\lambda}(f(x)-y)dx=u\int_0^{\lambda}e^{-x}dx=u[-e^{-x}]_0^{\lambda}=4(e-e^{-\lambda})cm^2$$

b) On a :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}(4(e-e^{-\lambda}))=4e\ cm^2\approx 10{,}873cm^2 \quad car \quad \lim_{\lambda\to+\infty}e^{-\lambda}=0$$



Lycée Etoile Polaire

Baccalauréat de l'enseignement du second degré — Session de juin 2004

Épreuve de mathématiques — série D — Durée 04 h — coefficient 4

Exercice 1 : P est un plan affine euclidien. A chaque point M du plan est associé un nombre complexe Z, affixe de M.

On considère la transformation T de P dans P qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que : $Z' = (a+i)Z + 1 + bi$, a et b étant des réels.

1. Calculer la valeur de a pour que T soit une similitude directe d'angle $\frac{3\pi}{4}$.
2. Soit I le centre de cette similitude ; a étant trouvé.
   a) Calculer les coordonnées de I en fonction de b
   b) Déterminer une équation de l'ensemble décrit par le point I quand b varie.
3. Montrer que pour $a = 0$, T est une rotation. Quelle est la mesure de l'angle de T ?

Exercice 2 :

La société tchadienne d'électricité dispose de deux générateurs électriques G_1 et G_2 pour alimenter une ville. Ces groupes fonctionnent indépendamment l'un de l'autre.

Selon le constructeur, la probabilité pour que G_1 soit en panne est 0,01 et la probabilité pour que G_2 soit en panne est 0,02. Il y a délestage dans le secteur A de la ville si G_1 est en panne et dans le secteur B de la ville si G_1 ou G_2 sont en panne.

1. Calculer la probabilité des évènements suivants :
   - E_1 : il y a délestage dans le secteur A
   - E_2 : il y a délestage dans le secteur B
   - E_3 : toute la ville est éclairée
2. Soit X le nombre de générateurs en panne
   a) Déterminer la loi de probabilité de X
   b) Calculer l'espérance mathématique de X

Problème :

A- On considère l'équation différentielle (E): $y'' - 2y' - y = 0$. (y fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$)

1) Résoudre l'équation (E)
2) On considère les solutions de (E) dont la représentation graphique passe par $A\binom{0}{-1}$
   a) Montrer que ces solutions s'écrivent sous la forme : $f_m(x) = (mx-1)e^x$, où m est un réel.
   b) On suppose $m < 0$. Etudier les variations de f_m

B- Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-1)e^x$

1) Étudier les variations de f
2) Construire la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$
3) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de f et les droites d'équations

$$x = \frac{1}{2}; \quad x = -\frac{1}{2}; \quad y = 0$$

C- Soit h la restriction de f à $[\frac{1}{2}; +\infty[$

1) Montrer que h est une bijection de $[\frac{1}{2}; +\infty[$ dans un intervalle q' et donner le sens de variation de h^{-1}
2) Écrire l'équation de la tangente à la courbe C_h représentative de h ....

7

Correction BAC D 2004

Exercice 1 :

Soit P le plan affine euclidien et T la transformation de P dans P qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' tel que : $Z' = (a+i)Z + 1 + bi$, a et b étant des réels.

1. Calculons la valeur de a pour que T soit une similitude directe d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

Pour que T soit une similitude directe d'angle $\frac{3\pi}{4}$, il faut que $\frac{3\pi}{4}$ soit un argument de $(a+i)$.

D'où : $\begin{cases} \cos\frac{3\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \\ \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} & (1) \\ \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} & (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow a^2 = 1$ et $a^2 = 1$ dans $(1) \Rightarrow a = -1$

2. Soit I le centre de cette similitude ; a étant trouvé.

a) Calculons les coordonnées de I en fonction de b

Posons : $I\binom{x_0}{y_0}$ on a : $Z_I = x_0 + iy_0$

I est centre de la similitude T donc $T(I) = I$ d'où :

$$x_0 + iy_0 = (-1+i)(x_0+iy_0) + 1 + ib \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 + y_0 - 1 = 0 \\ -x_0 + 2y_0 - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{2-b}{5} \\ y_0 = \dfrac{2b+1}{5} \end{cases}$$

b) Déterminons une équation de l'ensemble décrit par le point I quand b varie.

On a : $x_0 = \frac{2-b}{5} \Leftrightarrow b = -5x_0 + 2$ d'où $y_0 = \frac{2b+1}{5} \Rightarrow y_0 = \frac{2(-5x_0+2)+1}{5} = -2x_0 + 1$.

Lorsque b varie, l'ensemble décrit par I est la droite d'équation $y = -2x + 1$

c) Montrons que pour $a = 0$, T est une rotation.

Pour $a = 0$, on a : $Z' = iZ + 1 + ib$ et $|i| = 1$; $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$

Donc pour $a = 0$, T est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 2 :

La société tchadienne d'électricité dispose de deux générateurs électriques G_1 et G_2 pour alimenter une ville. Ces groupes fonctionnent indépendamment l'un de l'autre.

Selon le constructeur, la probabilité pour que G_1 soit en panne est 0,01 et la probabilité pour que G_2 soit en panne est 0,02. Il y a délestage dans le secteur A de la ville si G_1 est en panne et dans le secteur B de la ville si G_1 ou G_2 sont en panne.

1. Soit $P(G_1)$ la probabilité pour que G_1 soit en panne et $P(G_2)$ la probabilité pour que G_2 soit en panne. Calculons les probabilités des évènements suivants :

- E_1 : il y a délestage dans le secteur A

L'évènement E_1 est équivalent à l'évènement : « G_1 est en panne ». D'où $P(E_1) = P(G_1) = 0,01$

- E_2 : il y a délestage dans le secteur B

L'évènement E_2 est équivalent à l'évènement : « G_1 ou G_2 sont en panne ».

D'où $P(E_2) = P(G_1) + P(G_1) - P(G_1) \times P(G_2) = 0.01 + 0.02 - 0,01 \times 0,02 = 0,0298$

- E_3 : toute la ville est éclairée

Soit $P'(G_1)$ la probabilité pour que G_1 soit en état de marche et $P'(G_2)$ la probabilité pour que G_2 soit en état de marche.

L'évènement E_3 est équivalent à l'évènement : « G_1 et G_1 sont simultanément en état de marche ». D'où $P(E_3) = P'(G_1) \times P'(G_2)$ or $P(G_1) + P'(G_1) = 1$ et $P(G_2) + P'(G_2) = 1$

Donc $P(E_3) = (1 - P(G_1))(1 - P(G_2)) = (1 - 0.01)(1 - 0.02) = 0,9702$

2. Soit X le nombre de générateurs en panne

a) Déterminons la loi de probabilité de X

On a : $P(0) = P(E_3) = 0.9702;$

$P(1) = P(G_1) + P(G_2) - 2\,P(G_1) \times P(G_2) = 0.01 + 0.02 - 0.0004 = 0.0296$ $P(2) = P(G_1) \times P(G_2) = 0.0002$

D'où la loi de probabilité de X est :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,9702	0,0296	0,0002

c) Calculer l'espérance mathématique de X

L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = \sum_{i=0}^{2} x_i P(x_i) = 0 \times 0,9402 + 1 \times 0,0296 + 2 \times 0,0002 = 0,03$$

Problème :

A- Considérons l'équation différentielle (E): $y'' - 2y' - y = 0$. (y fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$)

1) Résolvons l'équation (E).

L'équation caractéristique de (E) est : $r^2 - 2r - 1 = 0 \Leftrightarrow r = 1 - \sqrt{2}$ ou $r = 1 + \sqrt{2}$

Donc les solutions de (E) sont les fonctions : $x \to Ae^{(1-\sqrt{2})x} + Be^{(1+\sqrt{2})x}$ avec $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.

2) Considérons les solutions de (E) dont la représentation graphique passe par $A\binom{0}{-1}$

a) Montrons que ces solutions s'écrivent sous la forme : $f_m(x) = (mx - 1)e^x$, où m est un réel.

Soit $m \in \mathbb{R}$ on a : $f_m(0) = (0 \times m - 1)e^0 = -1$ de plus, $f'_m(x) = me^x + (mx - 1)e^x$ et $f''_m(x) = me^x + me^x + (mx - 1)e^x = 2me^x + (mx - 1)e^x$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''_m(x) - 2f'_m(x) - f_m(x) = 2me^x + (mx - 1)e^x - 2(me^x + (mx - 1)e^x) - (mx - 1)e^x = -2(mx - 1)e^x$.

Il convient de dire que les fonctions f_m définies par $f_m(x) = (mx - 1)e^x$ ne sont pas solutions de (E).

b) Supposons $m < 0$. Etudions les variations de f_m

Quel que soit $m < 0$, $f_m(x)$ est continue et dérivable dans $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions polynôme et exponentielle.

Et, $f'_m(x) = me^x + (mx-1)e^x = (mx+m-1)e^x$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $e^x > 0$

Donc le signe de $f'_m(x)$ ne dépend que de celui de $(mx+m-1)$. et $mx+m-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1-m}{m}$. D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1-m}{m}$	$+\infty$
$f_m(x)$	$+$		$-$

Dans ce tableau, on a tenu compte de ce que $m < 0$

Ainsi :

- Pour $x \in]-\infty; \frac{1-m}{m}[$, f_m est croissante.
- Pour $x \in]\frac{1-m}{m}; +\infty[$, f_m est décroissante.

B- Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x-1)e^x$

1) Étudions les variations de f

On a : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x-1}{e^x} = 0 \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2xe^x = +\infty$$

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. Et quelque soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2e^x + (2x-1)e^x = (2x+1)e^x$$

Or quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend uniquement de celui de $2x+1$.

Et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ de plus $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2e^{-\frac{1}{2}}$

D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	0 ↘	$-2e^{-\frac{1}{2}}$	↗ $+\infty$

2) Construire la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

La représentation graphique de f sera proposée à la fin de la correction

3) Calculons l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de f et les droites d'équations

$$x = \frac{1}{2}; \quad x = -\frac{1}{2}; \quad y = 0$$

Soit A cette aire, et u l'unité d'aire on a :

$$A = -\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^x dx\right)u$$

En posant $u(x) = 2x - 1$; et $v'(x) = e^x$, on a : $u'(x) = 2$ et $v(x) = e^x$

Et

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}[u'(x).v(x) + v'(x).u(x)]dx = [u(x).v(x)]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

D'où

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} v'(x).u(x)dx = [u(x).v(x)]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u'(x).v(x)dx.$$

En remplaçant $u(x)$; $v(x)$; $u'(x)$ et $v'(x)$ par leurs valeurs respectives, on obtient : $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = [(2x-1)e^x]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - 2[e^x]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = [(2x-3)e^x]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -2e^{\frac{1}{2}} - 4e^{-\frac{1}{2}}$

Ainsi :

$$A = -\left(-2e^{\frac{1}{2}} - 4e^{-\frac{1}{2}}\right) = 2e^{\frac{1}{2}} + 4e^{-\frac{1}{2}}$$

C- Soit h la restriction de f à $[\frac{1}{2}; +\infty[$

1) Montrons que h est une bijection de $[\frac{1}{2}; +\infty[$ dans un intervalle à déterminer.

Le tableau de variation de f nous montre que f est continue et strictement croissante sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$. De plus $[\frac{1}{2}; +\infty[\subset]-\frac{1}{2}; +\infty[$. D'où f est strictement croissante sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$.

Ainsi, la restriction h de f à $[\frac{1}{2}; +\infty[$ est une fonction continue et strictement croissante, elle réalise donc une bijection de $[\frac{1}{2}; +\infty[$ vers $[f\left(\frac{1}{2}\right); \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [0; +\infty[$.

Sens de variation de h^{-1}

Soit h^{-1} la bijection réciproque de h. h^{-1} est continue et strictement monotone sur $[0; +\infty[$ de plus, $h^{-1}(0) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to+\infty} h^{-1}(x) = +\infty$. Donc h^{-1} est strictement croissante.

3) Écrire l'équation de la tangente à la courbe C_h représentative de h..............

Baccalauréat de l'enseignement du second degré Session de juin 2005

Épreuve de mathématiques série D Durée 04 h coefficient 4

Exercice 1 :

On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par : $P(z) = 2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2$

1) Démontrer que si z_0 est racine de ce polynôme, les nombres $\frac{1}{z_0}$ et $\overline{z_0}$ le sont aussi.
2) Calculer $(1+i)^2$; $(1+i)^3$; $(1+i)^4$ puis $P(1+i)$.
3) En déduire la résolution dans C de l'équation $P(z) = 0$, dont on admettra qu'elle a quatre solutions

Exercice 2 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout n de N $u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$

1) Montrer que pour tout n de N, $u_n \neq 1$.
2) A) on pose : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme v_0. B) exprimer v_n en fonction de n
3) A) exprimer u_n en fonction de v_n . B) en déduire u_n en fonction de n.
4) Calculer la limite de u_n.

Problème :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = xe^{-x} - \frac{1}{2}x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Justifier notamment l'existence d'une droite (D) asymptote à (C).
2) A) calculer la dérivée de f.
   B) On pose $(x) = (1-x)e^{-x} - \frac{1}{2}$. Démontrer en étudiant les variations de φ, que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0 \leq \alpha \leq 0{,}5$.
3) Soit la fonction h définie sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ par : $h(x) = 1 - \frac{1}{2}e^x$.
   a) Démontrer que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$
   b) On note I l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Démontrer que, pour tout x de I, $h(x)$ est un élément de I.
   c) Démontrer que, pour tout x de I, $|h'(x)| \leq 0{,}83$.
   d) Déduire des résultats précédents que, pour tout x de I, $|h(x) - \alpha| \leq 0{,}83|x - \alpha|$.
4) Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout n de N, $u_{n+1} = h(u_n)$.
   a) Montrer que pour tout n de N, $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0.83|u_n - \alpha|$, puis que pour tout n de N, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0{,}83)^n$.
   b) Déterminer la limite de (u_n)
   c) Déterminer un entier p tel que : $|u_p - \alpha| < 10^{-2}$.
   d) Dresser le tableau de variation de f et construire (D) et (C).

Correction BAC D 2005

Exercice 1 :

On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = 2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2$$

1) Démontrons que si z_0 est racine de $P(z)$, alors les nombres $\frac{1}{z_0}$ et $\overline{z_0}$ le sont aussi.

Soit z_0 une racine de $P(z)$ on a : $P(z_0) = 0$.

- Montrons que $P(\overline{z_0}) = 0$

$$P(\overline{z_0}) = 2\,\overline{z_0}^{\,4} - 6\,\overline{z_0}^{\,3} + 9\,\overline{z_0}^{\,2} - 6\,\overline{z_0} + 2 = 2\overline{z^4} - 6\overline{z^3} + 9\overline{z^2} - \overline{6z} + \overline{2}$$
$$= \overline{2z^4} - \overline{6z^3} + \overline{9z^2} - \overline{6z} + \overline{2} = \overline{2z^4 - 6z^3 + 9z^2 - 6z + 2} = \overline{P(z_0)} = \overline{0} = 0$$

Donc $\overline{z_0}$ est une racine de $P(z)$ si z_0 en est une.

- Montrons que $P\left(\frac{1}{z_0}\right) = 0$

On a : $z_0 \neq 0$ car $P(0) = 2$ et $P(z_0) = 0$. Et :

$$P\left(\frac{1}{z_0}\right) = \frac{2}{z_0^4} - \frac{6}{z_0^3} + \frac{9}{z_0^2} - \frac{6}{z_0} + 2 = \frac{2 - 6z_0 + 9z_0^2 - 6z_0^3 + 2z_0^4}{z_0^4} = \frac{P(z_0)}{z_0^4} = \frac{0}{z_0^4} = 0$$

Donc si z_0 est une racine de $P(z)$, $\frac{1}{z_0}$ est aussi une racine de $P(z)$

2) Calculons $(1+i)^2$; $(1+i)^3$; $(1+i)^4$ puis $P(1+i)$.

- Calcul de $(1+i)^2$

$$(1+i)^2 = 1^2 + 2i - 1 = 2i$$

- Calcul de $(1+i)^3$

$$(1+i)^3 = (1+i)(1+i)^2 = 2i(1+i) = -2 + 2i$$

- Calcul de $(1+i)^4$

$$(1+i)^4 = [(1+i)^2]^2 = (2i)^2 = -4$$

- Calcul de $P(1+i)$

$$P(1+i) = 2(1+i)^4 - 6(1+i)^3 + 9(1+i)^2 - 6(1+i) + 2$$
$$= 2(-4) - 6(-2+2i) + 9(2i) - 6(1+i) + 2$$
$$= -8 + 12 - 12i + 18i - 6 - 6i + 2 = -14 + 14 - 18i + 18i = 0$$

3) Déduisons en la résolution dans C de l'équation $P(z) = 0$,

On a : d'après la question 1), $P(1+i) = 0 \Longrightarrow P(1-i) = 0$ et $P\left(\frac{1}{1+i}\right) = P\left(\frac{1-i}{2}\right) = 0$.

Comme $\frac{1-i}{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$ alors $\overline{\frac{1-i}{2}} = \frac{1+i}{2}$ est aussi solution de l'équation $P(z) = 0$.

Soit S l'ensemble solution de l'équation $P(z) = 0$ on a :

$$S = \left\{1+i; 1-i; \frac{1-i}{2}; \frac{1+i}{2}\right\}$$

Exercice 2 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout n de N $u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$

1) Montrons que pour tout n de N, $u_n \neq 1$.

Supposons qu'il existe $k \in N,\ u_k = 1$
On a :

$$u_k = 1 \Rightarrow \frac{5u_{k-1} - 1}{u_{k-1} + 3} = 1 \Rightarrow 5u_{k-1} - 1 = u_{k-1} + 3 \Rightarrow 4u_{k-1} = 4 \Rightarrow u_{k-1} = 1$$

De même, $u_{k-2} = u_{k-3} = \cdots = u_0 = 1$ si $u_k = 1$ or $u_0 = 2$
Donc pour tout $n \in N,\ u_n \neq 1$

2) A) On pose : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ montrons que (v_n) est une suite arithmétique.

On a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{5u_n - 1}{u_n + 3} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 4}{u_n + 3}} - \frac{1}{u_n - 1}$$
$$= \frac{u_n + 3}{4(u_n - 1)} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 3 - 4}{4(u_n - 1)} = \frac{1}{4}$$

Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{4}$ et premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = 1$.

B) Exprimons v_n en fonction de n

(v_n) est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $r = \frac{1}{4}$ d'où la formule explicite de (v_n) est $v_n = 1 + \frac{n}{4}$

C) Exprimons u_n en fonction de v_n .

On a : $v_n = \frac{1}{u_n - 1} \Leftrightarrow u_n - 1 = \frac{1}{v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{v_n} + 1$

D) En déduisons u_n en fonction de n.

On a :

$$u_n = \frac{1}{v_n} + 1 = \frac{1}{1 + \frac{n}{4}} + 1 = \frac{n + 8}{n + 4}$$

3) Calculons la limite de u_n.
On a :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n + 8}{n + 4} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n} = 1$$

Problème :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = xe^{-x} - \frac{1}{2}x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Etudions les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
On a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(xe^{-x} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^x} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}x\right) = -\infty$$

Car $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right) = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(xe^{-x} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-xe^{x} + \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left[x\left(\frac{1}{2} - e^x\right)\right]$$

Or

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty \ et \ \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2} - e^x\right) = -\infty$$

D'où

Scanned by CamScanner

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Justifions l'existence d'une droite (D) asymptote à (C).

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Donc la droite $(D): y = -\frac{1}{2}x + b$ (où b est un nombre réel à déterminer) est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

Calcul de b. On a :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[xe^{-x} - \frac{1}{2}x - \left(-\frac{1}{2}x + b\right)\right] = 0 \Leftrightarrow b = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x}}\right) = 0$$

Ainsi $(D): y = -\frac{1}{2}x$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

Et :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x} - \frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{x} - \frac{1}{2}\right) = +\infty$$

Ainsi (C) n'admet pas d'asymptote oblique au voisinage de $-\infty$

1) A) calculons la dérivée de f.

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
Et, quel que soit $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = \left(xe^{-x} - \frac{1}{2}x\right)' = e^{-x} - xe^{-x} - \frac{1}{2} = (1-x)e^{-x} - \frac{1}{2}$$

B) Posons : $\varphi(x) = (1-x)e^{-x} - \frac{1}{2}$ et démontrons en étudiant les variations de φ, que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0 \leq \alpha \leq 0{,}5$.

Calcul des limites :

- $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty}\left((1-x)e^{-x} - \frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{e^{x}} + \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty}\left((1-x)e^{-x} - \frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left((1+x)e^{x} - \frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty} xe^{x} = +\infty$

Dérivée et sens de variation :

φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions continues et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(x) = \left[(1-x)e^{-x} - \frac{1}{2}\right]' = -e^{-x} + (x-1)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$$

D'où $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ et $\varphi(2) = (1-2)e^{-2} - \frac{1}{2} = -e^{-2} - \frac{1}{2} = -(e^{-2} + 1)$

Par ailleurs le signe de $\varphi'(x)$ ne dépend que de celui de $(x-2)$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} \geq 0$

Ainsi,

- Pour $x \in]-\infty; 2]$, $\varphi'(x) < 0$ et φ est strictement décroissante
- Pour $x \in]2; +\infty[$, $\varphi'(x) > 0$ et φ est strictement croissante

φ est strictement décroissante sur $]-\infty; 2]$ et $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty$; $\varphi(2) = -(e^{-2} + 1) < 0$

Donc, comme $0 \in]-\infty; 2]$, il existe un unique $\alpha \in]-\infty; 2]$, $\varphi(\alpha) = 0$.

43

D'autre part, φ est strictement croissante sur $]2;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\frac{1}{2}$; $\varphi(2) = -(e^{-2}+1) < 0$. Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $[2;+\infty[$
Ainsi l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α, $\alpha \in]-\infty;2]$
De plus, $\varphi(0) = (1-0)e^{-0} - \frac{1}{2} = e - \frac{1}{2} > 0$
Et $\varphi(0,5) = (1-0,5)e^{-0,5} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) < 0$
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in]0;0,5[$, $\varphi(x_0) = 0$
Comme l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\varphi(x_0) = 0$ alors $\alpha = x_0$
L'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α tel que $0 \le \alpha \le 0,5$

2) Soit la fonction h définie sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ par :

$$h(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{x}.$$

a) Démontrons que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$

On a :

$$h(x) = x \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}e^{x} = x \Leftrightarrow \frac{1-\frac{1}{2}e^{x}}{e^{x}} = \frac{x}{e^{x}} \Leftrightarrow e^{-x} - \frac{1}{2} = xe^{-x} \Leftrightarrow (1-x)e^{-x} - \frac{1}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \varphi(x) = 0$$

Donc l'unique solution de $\varphi(x) = 0$ qui est α est aussi l'unique solution de $h(x) = x$

b) On note I l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Démontrons que, pour tout x de I, $h(x)$ est un élément de I.

h est continue et dérivable sur I comme somme de fonctions continues dérivables sur I et quelque soit $x \in I$ $h'(x) = -\frac{1}{2}e^{x}$ donc h est strictement décroissante car pour tout x dans I on a $h'(x) < 0$

h réalise donc une bijection de I vers $\left[\, h\left(\frac{1}{2}\right); h(0)\right]$ or $h\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{e} \approx 0.175$ et $h(0) = 1 - \frac{1}{2} = 0.5$

d'où $\left[\, h\left(\frac{1}{2}\right); h(0)\right] \subset I$. On conclu que, pour tout x de I, $h(x)$ est un élément de I

c) Démontrons que, pour tout x de I, $|h'(x)| \le 0,83$
Soit $x \in I$ on a : $h'\left(\frac{1}{2}\right) < h'(x) < h'(0)$ car $h'(x)$ est strictement décroissante.
D'où

$$-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} < h'(x) < -\frac{1}{2}e^{0}$$

Ainsi :

$$-0,83 < h'(x) < -0,5$$

Donc pour tout $x \in I$, on a :

$$|h'(x)| \le 0,83$$

d) Déduisons des résultats précédents que, pour tout x de I, $|h(x) - \alpha| \le 0,83|x - \alpha|$.
Soit $x \in I$
On a :
$|h(x) - \alpha| = |h(x) - h(\alpha)|$ car α est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$. Par ailleurs, pour tout $x \in I$, on a :

$$\left|h^{'}(x)\right| \le 0,83$$

44

D'où d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$|h(x) - h(\alpha)| \leq 0{,}83|x - \alpha|$$

C'est-à-dire :

$$|h(x) - \alpha| \leq 0{,}83|x - \alpha|$$

3) Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout n de N, $u_{n+1} = h(u_n)$.

a) Démontrons que pour tout n de N,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0.83|u_n - \alpha|.$$

Soit $n \in N$ on a : $u_n \in I$ d'où

$$|h(u_n) - \alpha| \leq 0.83|u_n - \alpha|$$

Or $h(u_n) = u_{n+1}$ donc

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0.83|u_n - \alpha|$$

Puis montrons que pour tout n de N,

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0{,}83)^n$$

On a : $|u_0 - \alpha| = |\alpha| \leq \frac{1}{2}(0{,}83)^0$ car $(0{,}83)^0 = 1$ et $|\alpha| \leq \frac{1}{2}$

Montrons que si

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0{,}83)^n$$

Alors

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0{,}83)^{n+1}$$

Supposons

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0{,}83)^n$$

On a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0{,}83|u_n - \alpha| \quad (1)$$

Or

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0{,}83)^n \Longrightarrow 0{,}83|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0{,}83)^{n+1} \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) , par transition montrent que si

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0{,}83)^n$$

Alors

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0{,}83)^{n+1}$$

On peut donc conclure que pour tout n de N,

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(0{,}83)^n$$

b) Déterminer la limite de (u_n)

Soit

$$(v_n): \quad v_n = \frac{1}{2}(0{,}83)^n$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$$

Donc

45

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$$

c) Déterminons un entier p tel que :

$$|u_p - \alpha| < 10^{-2}$$

Trouvons plutôt un entier p tel que

$$\frac{1}{2}(0{,}83)^p < 10^{-2}.$$

$$\frac{1}{2}(0{,}83)^p < 10^{-2} \Rightarrow (0{,}83)^p < 0{,}02 \Rightarrow \ln(0{,}83)^p < \ln 0{,}02 \Rightarrow p \ln 0{,}83 < \ln 0{,}02$$

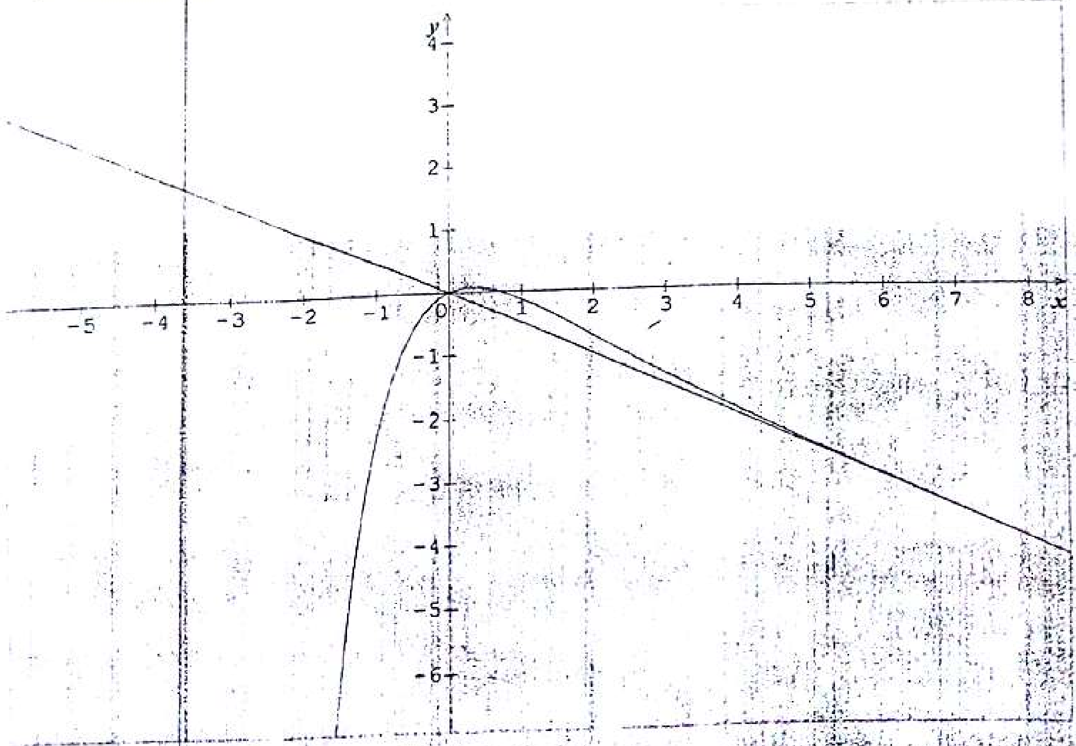
Comme $\ln 0{,}83 < 0$ alors, $p > \frac{\ln 0{,}02}{\ln 0{,}83}$. De plus, $\frac{\ln 0{,}02}{\ln 0{,}83} \approx 20{,}9$

D'où $p > 20{,}9$. On peut prendre $p = 21$

d) Dressons le tableau de variation de f et construisons (D) et (C)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$+\infty$

Représentation graphique de f



46

Baccalauréat de l'enseignement du second degré *Session de juin 2006*

Épreuve de mathématiques *série D* *Durée 04 h* *coefficient 4*

Exercice 1 :

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres complexes C par $f(z) = az^3 + bz^2 + cz$ où a, b et c appartiennent à C.

1) Déterminer a, b et c sachant que :
   a. $f(1) = -3 + 4i$
   b. $f(i) = -4 - 3i$
   c. $f(-i) = 10 + 5i$
2) a, b et c ayant les valeurs trouvées à la question précédente, résoudre dans C l'équation $f(z) = 0$

Exercice 2 :

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher dont trois rouges et deux noires. On tire successivement au hasard deux boules de cette urne et l'on note leurs couleurs dans l'ordre des tirages effectués. On considère les cas suivants :

1) Les tirages successifs avec remise.
2) Les tirages successifs sans remise.

a. Calculer la probabilité de tirer une boule noire en premier lieu et une boule rouge en second lieu.
b. Calculer la probabilité de tirer une boule rouge en second lieu.

NB : 1- Pour chacun des cas construire un arbre de probabilité.
2- On rappelle qu'il y a équiprobabilité.

Problème :

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{cx}$, où a, b et c sont des réels. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Calculer a, b et c pour que la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, par le point $B(0; 1)$ et qu'elle admette en B une tangente ayant un coefficient directeur égal au nombre 1.
2) On supposera désormais que f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$
   a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote pour $+\infty$
   b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$ et en déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$
4) Montrer que, sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$, l'équation $f(x) = 1$ a une solution unique α. Donner la valeur décimale arrondie à 10^{-2} près de α.
5) Écrire une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point B
6) Tracer $\mathcal{C}$ et T dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique $2cm$)

Partie B : On donne la fonction F définie par $F(x) = (-2x - 3)e^{-x} + 3$

1) Montrer que F est la primitive sur $\mathbb{R}$ de f qui s'annule pour $x = 0$.
2) Calculer, en cm^2, la valeur exacte de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 1$. Donner la valeur approchée de cette aire à 10^{-2} près

9

Lycée Etoile Polaire

Correction BAC D 2006

Exercice 1 :

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres complexes C par $f(z) = az^3 + bz^2 + cz$ où a, b et c appartiennent à C.

1) Déterminer a, b et c sachant que :
a. $f(1) = -3 + 4i$
b. $f(i) = -4 - 3i$
c. $f(-i) = 10 + 5i$

On a :

$$f(1) = -3 + 4i \Rightarrow a + b + c = -3 + 4i$$

$$f(i) = -4 - 3i \Rightarrow -ia - b + ic = -4 - 3i$$

$$f(-i) = 10 + 5i \Rightarrow ia - b - ic = 10 + 5i$$

D'où le système suivant :

$$\begin{cases} a + b + c = -3 + 4i & (L) \\ -ia - b + ic = -4 - 3i & (L') \\ ia - b - ic = 10 + 5i & (L'') \end{cases}$$

En sommant (L') et (L''), on obtient
$-2b = 6 + 2i \Leftrightarrow \underline{b = -3 - i}$

$$(L'') - (L') \Rightarrow 2ia - 2ic = 14 + 8i$$

$$\Rightarrow a = c + 4 - 7i \quad (*)$$

En remplaçant b et a par leurs valeurs, (L) devient :

$$c + 4 - 7i - 3 - i + c = -3 + 4i$$

D'où $\underline{c = -2 + 6i}$

En replaçant c par sa valeur dans $(*)$ on obtient :

$$a = -2 + 6i + 4 - 7i$$

D'où $\underline{a = 2 - i}$

Résolvons dans C l'équation $f(z) = 0$

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow az^3 + bz^2 + cz = 0 \Leftrightarrow z(az^2 + bz + c) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } az^2 + bz + c = 0$$

Pour $az^2 + bz + c = 0$, on a :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3 - i)^2 - 4(2 - i)(-2 + 6i) = -50i$$

Soit $\delta = x + iy$ une racine de Δ on a :

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xy = -50i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (1) \\ 2xy = -50 & (2) \\ x^2 + y^2 = 50 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x = 5 \text{ ou } x = -5.$$

Ainsi, pour $x = 5$, $(2) \Rightarrow y = -5$ et pour $x = -5$, $(2) \Rightarrow y = 5$.

Donc les racines de Δ sont :

$$\delta_1 = 5 - 5i \quad et \quad \delta_2 = -5 + 5i$$

D'où

$$z_1 = \frac{-b + \delta_1}{2a} = \frac{3 + i + 5 - 5i}{4 - 2i} = 2 \quad et \quad z_2 = \frac{-b + \delta_2}{2a} = \frac{3 + i - 5 + 5i}{4 - 2i} = -1 + i$$

Soit S l'ensemble solution de l'équation $f(z) = 0$

On a :

$$S = \{\ 0\ ;\quad 2\ ;\quad -1 + i\ \}$$

Exercice 2 :

Une urne contient cinq boules indiscernables au touché dont trois rouges et deux noires.

1) Les tirages successifs avec remise de deux boules

$1er\ tirage$	$2ème\ tirage$	$Issues$	$P(Issue)$
$3\ R$	$3\ R$	$9\ R - R$	$9/25$
	$2\ N$	$6\ R - N$	$6/25$
$2\ N$	$3\ R$	$6\ N - R$	$6/25$
	$2\ N$	$4\ N - N$	$4/25$

a. La probabilité de tirer une boule noire en premier lieu et une boule rouge en second lieu est :

$$P(N - R) = \frac{6}{25}$$

b. La probabilité de tirer une boule rouge en second lieu est :

$$P(R_2) = P(R - R) + P(N - R) = \frac{9}{25} + \frac{6}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

2) Les tirages successifs sans remise.

$1er\ tirage$	$2ème\ tirage$	$Issues$	$P(Issue)$
$3\ R$	$2\ R$	$6\ R - R$	$6/20$
	$2\ N$	$6\ R - N$	$6/20$
$2\ N$	$3\ R$	$6\ N - R$	$6/20$
	$1\ N$	$2\ N - N$	$2/20$

a. La probabilité de tirer une boule noire en premier lieu et une boule rouge en second lieu est :

$$P(N - R) = \frac{6}{20}$$

a. La probabilité de tirer une boule en second lieu est :

$$P(R_2) = P(R - R) + P(N - R) = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

Problème :

Partie A

48

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{cx}$, où a, b et c sont des réels. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) Calculons a, b et c pour que la courbe C passe par le point $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, par le point $B(0; 1)$ et qu'elle admette en B une tangente ayant un coefficient directeur égal au nombre 1.
D'après cet énoncé, on a :

$$f'(x) = (acx + a + bc)e^{cx}$$

D'où :

$$\begin{cases} f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(-\frac{a}{2} + b\right)e^{-c/2} = 0 \\ b = 1 \\ a + bc = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

2) On suppose que f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$

a. Déterminons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
On a :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x + 1)e^{-x}$$

Or

$$\lim_{x \to -\infty} (2x + 1) = -\infty$$

Et

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$$

D'où

$$\boldsymbol{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x + 1)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(2x + 1)}{e^{x}} = 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x}}$$

D'où

$$\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

On en déduit que l'axe $(O, \vec{\imath})$ est asymptote horizontal à C au voisinage de $+\infty$

b. Etudions les variations de f sur $\mathbb{R}$.
Dérivée et étude du signe de la dérivée.
f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. Et :

Quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (2x + 1)'e^{-x} + (e^{-x})'(2x + 1) = 2e^{-x} - (2x + 1)e^{-x} = (-2x + 1)e^{-x}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$

D'où le signe de $f'(x)$ est celui de $(-2x + 1)$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$-$

- Pour $x \in]-\infty; \frac{1}{2}[$, f est strictement croissante.
- Pour $x \in]\frac{1}{2}; +\infty[$, f est strictement décroissante.

3) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$
On a :

49

$$f(x)=0 \Leftrightarrow (2x+1)e^{-x}=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$		$+$

- Pour $x \in]-\infty;-\frac{1}{2}[$, on a $f(x)<0$
- Pour $x \in]-\frac{1}{2};+\infty[$, on a $f(x)>0$
- $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

4) Montrons que, sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};2\right]$, l'équation $f(x)=1$ a une solution unique α.

On a : $\left[\frac{1}{2};2\right] \subset]-\frac{1}{2};+\infty[$ donc f est strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2};2\right]$

De plus,

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(2\times\frac{1}{2}+1\right)e^{-\frac{1}{2}}=2e^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{\sqrt{e}}\approx 1.213$$

Et

$$f(2)=(2\times 2+1)e^{-2}=\frac{5}{e^2}\approx 0.677$$

Donc

$$f(2)<1<f\left(\frac{1}{2}\right)$$

D'où, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in \left[\frac{1}{2};2\right]$ tel que $f(\alpha)=$ 1

Ainsi α est l'unique solution de l'équation $f(x)=1$ et $\alpha \in \left[\frac{1}{2};2\right]$

Donnons la valeur décimale arrondie à 10^{-2} près de α.

On a :

$$f(1)\approx 1{,}104$$

Par balayage, on a les tableaux suivants :

x	1	...	1,2	1,3	...	2
$f(x)-1$	+	+	+	-	-	-

x	1,2	...	1.25	1,26	...	1,3
$f(x)-1$	+	+	+	-	-	-

Et

$$f\left(\frac{1{,}25+1{,}26}{2}\right)-1=f(1{,}255)-1\approx 0.00061$$

D'où

$$\alpha\approx 1{,}25$$

5) Equation de la tangente T à C au point B :

On a :

Une équation de la tangente au point $B(0;1)$ est :

$$y=(f'(0))(x-0)+f(0)=x+1$$

6) Tracer C et T dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique $2cm$) **voir dernière page de correction 2006**

Partie B

50

Baccalauréat de l'enseignement du second degré Session de juin 2007

Épreuve de mathématiques série D Durée 04 h coefficient 4

Exercice 1 :

On considère un sac contenant trois boules blanches et trois boules noires. On tire au hasard et simultanément trois boules

1. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A- « on obtient au moins une boule blanche »
   B- « on obtient au moins deux boules noires »
   C- « on obtient au moins une boule de chaque couleur »
2. Définir l'évènement $A \cap B$ par une phrase simple puis calculer sa probabilité.

Exercice 2 :

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in]-\pi;\pi[$

1. Résoudre dans C l'équation (E): $z^2 - (2r\cos\alpha)z + r^2 = 0$
2. Soit z_1 et z_2 les solutions de (E). Donner le module et l'argument de z_1 et z_2
3. Calculer z_1^n et z_2^n $\forall n \in N$. déterminer $P_n = z_1^n + z_2^n$.
4. On pose $r = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Trouver une relation entre P_n et P_{n+3} dans ce cas.
5. Calculer :

$$\lim_{n\to\infty} P(n)$$

Problème :

Soit la fonction f définie dans l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}$$

A- On considère la fonction h définie sur I par $h(x) = -x + 1 - 2\ln x$
   1- Calculer $h(1)$;
   2- Étudier les variations de h (on ne demande pas les limites de h en 0et en $+\infty$)
   3- En déduire le signe

B-
   1- Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
   2- soit f' la fonction dérivée de f
      a. calculer $f'(x)$
      b. Montrer que sur l'intervalle I , $f'(x)$ a le même signe que $h(x)$
      c. En déduire les variations de f sur I, puis dresser le tableau de variations de f.
   3-
      a. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[$ on a $f(x) > 0$
      b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$
      c. Déterminer la valeur décimale approchée de α à 10^{-2} près.
   4- Dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, tracer la courbe C_f

C-
   1- Calculer l'aire du domaine limité par la courbe C_f, représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = m$. $m > 1$
   2- L'aire est notée $A(m)$. Calculer

$$\lim_{m\to+\infty} A(m)$$

Correction BAC D 2007

Exercice 1 :

On considère un sac contenant trois boules blanches et trois boules noires. On tire au hasard et simultanément trois boules

1. Calculons la probabilité de chacun des évènements suivants :

   Soit Ω l'univers associé au tirage simultané de trois boules dans 6

   On a :

$$Card(\Omega) = C_6^3 = \frac{6!}{3!\,3!} = 20$$

A- « on obtient au moins une boule blanche »

Soit A l'évènement « obtenir au moins une boule blanche. »

On a :

$$Card(A) = C_3^1C_3^2 + C_3^2C_3^1 + C_3^3C_3^0 = 3\times 3 + 3\times 3 + 1\times 1 = 19$$

D'où $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{19}{20} = 0{,}95$

B- « on obtient au moins deux boules noires »

Soit B l'évènement « obtenir au moins deux boules noires. »

On a :

$$Card(B) = C_3^2C_3^1 + C_3^3C_3^0 = 3\times 3 + 1 = 10$$

D'où $P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

C- « on obtient au moins une boule de chaque couleur »

Soit C l'évènement « obtenir une boule de chaque couleur. »

On a :

$$Card(C) = C_3^1C_3^2 + C_3^2C_3^1 = 3\times 3 + 3\times 3 = 18$$

D'où $P(C) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10} = 0{,}9$

3. Définition de l'évènement $A\cap B$ par une phrase simple :

   Obtenir une seule boule blanche ; obtenir exactement deux boules noires ; obtenir une boule blanche et deux boules noires.

   Puis calculons sa probabilité :

   On a :

$$Card(A\cap B) = C_3^1C_3^2 = 3\times 3 = 9$$

D'où $P(A\cap B) = \quad P(A) = \frac{Card(A\cap B)}{Card(\Omega)} = \frac{9}{20} = 0{,}45$

Exercice 2 :

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in]-\pi;\pi]$

1. Résolvons dans C l'équation (E): $z^2 - (2r\cos\alpha)z + r^2 = 0$

$$\Delta = 4r^2\cos^2\alpha - 4r^2 = 4r^2(\cos^2\alpha - 1) = -4r^2\sin^2\alpha$$

D'où les racines de Δ sont : $\delta_1 = 2r\,i\sin\alpha$ et $\delta_2 = -2ri\sin\alpha$.

On en déduit que :

$$z_1 = \frac{2r\cos\alpha + i2r\sin\alpha}{2} = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Et,

$$z_2 = \frac{2r\cos\alpha - i2r\sin\alpha}{2} = r(\cos\alpha - i\sin\alpha)$$

2. Soit z_1 et z_2 les solutions de (E). Donnons le module et l'argument de z_1 et z_2

   On a :

$$z_1 = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

52

Scanned by CamScanner

D'où le module de z_1 est $|z_1| = r$ et l'argument de z_1 est $\arg(z_1) = \alpha$. Et

$$z_2 = r(\cos\alpha - i\sin\alpha) = r(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$$

D'où le module de z_2 est $|z_2| = r$ et l'argument de z_2 est $\arg(z_2) = -\alpha$.

3. Calculer z_1^n et z_2^n $\forall n \in N$.
   Soit $n \in N$. On a :

$$z_1^n = (re^{i\alpha})^n = r^n e^{ni\alpha}$$

Et

$$z_2^n = (re^{-i\alpha})^n = r^n e^{-ni\alpha}$$

Déterminons $P_n = z_1^n + z_2^n$.
On a :

$$P_n = z_1^n + z_2^n = r^n e^{ni\alpha} + r^n e^{-ni\alpha} = r^n(e^{ni\alpha} + e^{-ni\alpha}) = 2r^n \frac{(e^{ni\alpha} + e^{-ni\alpha})}{2}$$
$$= 2r^n\cos(n\alpha)$$

4. On pose $r = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Trouvons une relation entre P_n et P_{n+3}
   Pour $r = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, on a :

$$P_n = 2r^n\cos(n\alpha) = \frac{2}{2^n}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

De même,

$$P_{n+3} = \frac{2}{2^{n+3}}\cos\left(\frac{2(n+3)\pi}{3}\right) = \frac{2}{2^{n+3}}\cos\left(\frac{2n\pi}{3} + 2\pi\right) = \frac{2}{2^{n+3}}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

D'où

$$\frac{P_n}{P_{n+3}} = \frac{\frac{2}{2^n}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}{\frac{2}{2^{n+3}}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)} = \frac{2^{n+3}}{2^n} = 2^3 = 8$$

Calcule de limite :

$\forall n \in N$, on a : $-1 \le \cos(n\alpha) \le 1 \Rightarrow -\frac{2}{2^n} \le P_n \le \frac{2}{2^n}$ et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{2^n} = 0$$

D'où d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} P(n) = 0$$

Problème :

Soit la fonction f définie dans l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}$$

A- On considère la fonction h définie sur I par $h(x) = -x + 1 - 2\ln x$

1- Calcule de $h(1)$:
   On a : $h(1) = -1 + 1 - 2\ln 1 = 0$

2- Etudions les variations de h.
   h est continue et dérivable dans $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions continues et dérivables dans $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$h'(x) = -1 - \frac{2}{x} = -\frac{x+2}{x}$$

   Or pour tout $x \in]0; +\infty[$,
   On a :

$$x + 2 > 0 \quad et \quad x > 0$$

   D'où le tableau de signe suivant :

53

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	||	$-$

Ainsi, h est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

3- Déduisons en le signe de $h(x)$
On a : h qui est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ donc l'équation $h(x)=0$ admet au plus une solution dans $]0;\infty[$ de plus, $1\in]0;+\infty[$ et $h(1)=0$
Donc l'unique solution de l'équation $h(x)=0$ est le nombre réel 1
On en déduit le tableau de signe suivant :

x	0	1	$+\infty$
$h(x)$	|| $+$		$-$

B-

1- Etudions les limites de f en 0 et en $+\infty$.

On a :

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x+\ln x}{x^2}\right)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{x^2}(x+\ln x)\right]$$

Or

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)=+\infty \quad et \quad \lim_{x\to0^+}(x+\ln x)=-\infty$$

D'où

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$$

Et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\ln x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)$$

Or

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0 \quad et \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)=0$$

D'où

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

Interprétation graphique des résultats obtenus.

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$$

Donc la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à la représentation graphique de f.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la représentation graphique de f

2- soit f' la fonction dérivée de f

a- Calculons $f'(x)$

f est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues et dérivables sur $]0;+\infty[$

Et , pour tout x dans $]0;+\infty[$,

$$f'(x) = \left(\frac{x+\ln x}{x^2}\right)' = \frac{\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)x^2 - 2x(x+\ln x)\right]}{x^4} = \frac{[x^2 + x - 2x^2 - 2x\ln x]}{x^4} = \frac{-x+1-2\ln x}{x^3}$$

b- Montrons que sur l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $h(x)$

Pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{-x+1-2\ln x}{x^3} = \frac{h(x)}{x^3} \quad et \quad x^3 > 0$$

Donc le signe de $f'(x)$ est exactement celui de $h(x)$

c- Déduisons en les variations de f sur $]0;+\infty[$,

On en déduit que

- Pour $x \in]0;1[$, on a $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante.
- Pour $x \in]1;+\infty[$, on a $f'(x) < 0$ donc f eststrictement décroissante.

Tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	|	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	1	↘	0

3-

a- Montrons que $\forall x \in]1;+\infty[$ on a $f(x) > 0$

f est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$. Donc l'image de l'intervalle $]1;+\infty[$ par f est :

$$]\lim_{x\to+\infty} f(x); \lim_{x\to 1} f(x)[=]0;1[$$

Ainsi $\forall x \in]1;+\infty[$ on a $f(x) > 0$

b- Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$

Considérons l'équation $f(x) = 0$ on a :

55

La fonction f est strictement croissante dans $]0;1[$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $f(1) = 1$ donc il existe un unique $x_0 \in]0;1[$, $f(x_0) = 0$.

Par ailleurs pour tout $x \in]1;+\infty[$, on a : $f(x) > 0$

Donc il existe un unique $x_0 \in]0;+\infty[$ tel que $f(x_0) = 0$

Ainsi : $\alpha = x_0$

Montrons $\alpha \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.

On a : $\left[\frac{1}{2};1\right] \subset]0;1[$, donc f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$

Or : $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0{,}77 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$ donc il existe $x_1 \in \left[\frac{1}{2};1\right]$, $f(x_1) = 0$

Comme l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α alors $\alpha = x_1$ d'où $\alpha \in \left[\frac{1}{2};1\right]$

c- Déterminons la valeur décimale approchée de α à 10^{-2} près.

Par la dichotomie, on a :

$$f\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{2}\right) = f(0{,}75) \approx 0{,}82 \Rightarrow \alpha \in]0{,}5;0{,}75[$$

$$f\left(\frac{0{,}5+0{,}75}{2}\right) = f(0{,}625) \approx 0{,}397 \Rightarrow \alpha \in]0{,}5;0{,}625[$$

$$f\left(\frac{0{,}5+0{,}625}{2}\right) = f(0{,}5625) \approx -0{,}041 \Rightarrow \alpha \in]0{,}5625;0{,}625[$$

$$f\left(\frac{0{,}5625+0{,}625}{2}\right) = f(0{,}59375) \approx 0{,}21 \Rightarrow \alpha \in]0{,}5625;0{,}59375[$$

$$f\left(\frac{0{,}5625+0{,}59375}{2}\right) \approx 0{,}052 \Rightarrow \alpha \in]0{,}5625;0{,}578125[$$

D'où $\alpha \approx 0{,}57$

4- Dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, tracer la courbe C_f (voir page suivante)

C-

1- Calculons l'aire du domaine limité par la courbe C_f, représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = m$. $m > 1$

Soit $A(m)$ cette aire ; on a :

$$A(m) = \int_1^m f(x)dx = \int_1^m \frac{x+\ln x}{x^2}dx = \int_1^m \frac{1}{x}dx + \int_1^m \frac{\ln x}{x^2}dx = [\ln m]_1^m + \int_1^m \frac{\ln x}{x^2}dx$$

Intégrons en utilisant l'intégration par partie l'expression :

$$\int_1^m \frac{\ln x}{x^2}dx$$

Posons :

56

$$u = \frac{1}{x};\ v = \ln x \quad on\ a:\ u' = -\frac{1}{x^2}\ ;\ v' = \frac{1}{x}$$

D'où

$$(uv)' = u'v + v'u \Leftrightarrow \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = -\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x^2} = \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)'$$

Ainsi,

$$\int_1^m \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right]_1^m$$

D'où

$$A(m) = \left(\ln m + \frac{1}{m} - \frac{\ln m}{m} - 1\right)u$$

2- L'aire est notée $A(m)$. Calculons

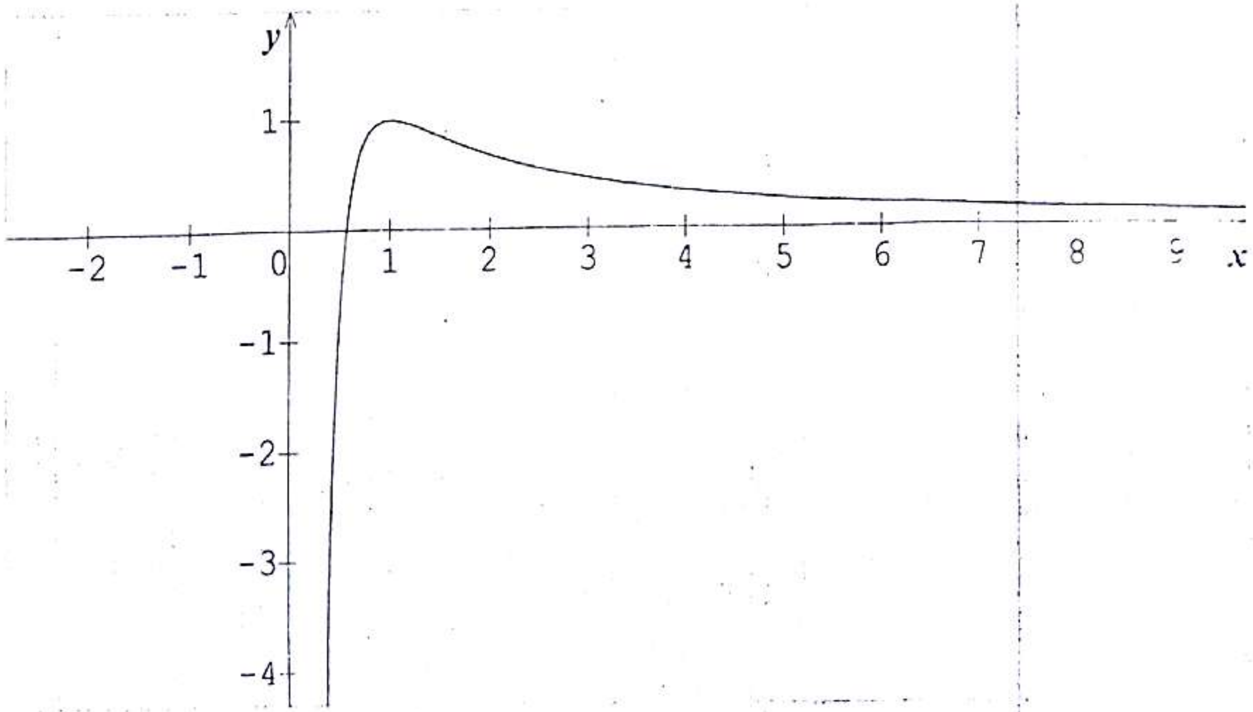
$$\lim_{m\to+\infty} A(m)$$

On a :

$$\lim_{m\to+\infty} A(m) = \lim_{m\to+\infty}\left(\ln m + \frac{1}{m} - \frac{\ln m}{m} - 1\right)u = +\infty$$

Car :

$$\lim_{m\to+\infty} 1 = 1;\quad \lim_{m\to+\infty} \ln m = +\infty;\quad \lim_{m\to+\infty}\frac{1}{m} = 0;\quad \lim_{m\to+\infty}\frac{\ln m}{m} = 0.$$



57

Baccalauréat de l'enseignement du second degré   Session de juin 2008

Épreuve de mathématiques   série D   Durée 04 h   coefficient 4

Exercice 1 : On donne le nombre complexe $z = -8\sqrt{3} + 8i$

1) Écrire z sous forme trigonométrique.
2) Calculer les racines carrées de z sous forme trigonométrique
3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$

Exercice 2 :

La suite numérique (U_n) est définie sur N par :

$U_0 = 0$ et la relation $U_{n+1} = \frac{2U_n+3}{U_n+4}$

1)
   a- Montrer par récurrence que $\forall n \geq 1,\ 0 < U_n < 1$.
   b- Montrer que la suite (U_n) est croissante (on pourra considérer $U_{n+1} - U_n$).
2) On considère la suite (V_n) définie par :
   Pour tout n de N, $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+3}$
   a- Montrer que la suite V_n est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.
   b- En déduire la limite de la suite V_n
3)
   a- **Exprimer U_n en fonction de V_n**
   b- **En déduire le comportement à l'infini de la suite (U_n).**

Problème : Partie A : On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = x^3 + \ln x - 1.$$

1) Étudier les variations de g.
2) En déduire le signe de g suivant les valeurs de x

A- On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x - 2\ln x}{2x}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Calculer la dérivée f' de f et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. En déduire le tableau de variation de f.
3) On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. (unité $2cm$).
   a- Étudier la position de (C) par rapport à la courbe (P) d'équation $y = \frac{x^2}{2} - 2$.
   b- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - y]$ que peut-on conclure ?
4) Tracer les courbes (C) et (P) dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
5) On désigne par (C_1) l'ensemble des points de (C) d'abscisses supérieurs à 2.
   a- Démontrer qu'il existe un pont d'intersection de (C_1) avec l'axe (Ox). Soit x_0 son abscisse.
   b- Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 2 et calculer l'abscisse x_1 du point d'intersection de (T) et (Ox).
6) Soit α un nombre réel supérieur à x_1. Calculer en fonction de α, l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre (C); (P) et les droites d'équations $x = x_1$ et $x = \alpha$. Calculer :

$$\lim_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$$

Correction BAD D 2008

Exercice 1 :

Soit $z = -8\sqrt{3} + 8i$

1) Ecrivons z sous forme trigonométrique.

On a : $|z| = \sqrt{\left(-8\sqrt{3}\right)^2 + 8^2} = 16$

En posant $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, on a : $r = |z| = 16$; $\cos\alpha = -\frac{8\sqrt{3}}{16} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6} = \cos -\frac{5\pi}{6}$ et $\sin\alpha = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6}$.

D'où $\alpha = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$. Ainsi la forme trigonométrique de z est :

$$z = 16\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

2) Calculons les racines carrées de z sous forme trigonométrique.

Soit $Z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ une racine carrée de z on a :

$$Z^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = 16 \\ 2\theta = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 4 \\ \theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

D'où pour $k = 0$, $\theta_0 = \frac{5\pi}{12}$ et pour $k = -1$, $\theta_1 = -\frac{7\pi}{12}$

Ainsi les racines de z sont :

$$Z_0 = 4\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) \quad et \quad Z_1 = 4\left(\cos -\frac{7\pi}{12} + i\sin -\frac{7\pi}{12}\right)$$

3) En déduisons les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et de $\sin\frac{5\pi}{12}$

Soit $Z = a + ib$ une racine carrée de z on a :

$$Z^2 = z \Rightarrow (a+ib)^2 = -8\sqrt{3} + 8i \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -8\sqrt{3} \\ 2ab = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -8\sqrt{3} \\ b = \frac{4}{a} \end{cases} \Rightarrow a^2 - \frac{16}{a^2} = -8\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a^4 + 8\sqrt{3}a^2 - 16 = 0$$

En posant $A = a^2$ on obtient : $A^2 + 8\sqrt{3}A - 16 = 0$

$$\Delta = \left(8\sqrt{3}\right)^2 + 4 \times 16 = 256 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 16$$

Donc $A = \frac{-8\sqrt{3}-16}{2}$ ou $A = \frac{-8\sqrt{3}+16}{2}$ or $A = a^2 \Rightarrow A \geq 0$. Ainsi $A = \frac{-8\sqrt{3}+16}{2} = 2(4 - 2\sqrt{3}) = 2\left(\sqrt{3}-1\right)^2$ on en déduit que $a_1 = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1) = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ ou $a_2 = -\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) = \sqrt{2} - \sqrt{6}$ et $b_1 = \frac{4}{a_1} = \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ et $b_2 = \frac{4}{a_2} = \frac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2-6} = -\sqrt{6} - \sqrt{2}$. D'où

$$Z'_0 = a_1 + ib_1 = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \quad et \; Z'_1 = -(\sqrt{6} - \sqrt{2}) - i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

58

Puisque $0 < \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$, on peut conclure que $Z'_0 = Z_0$.

En identifiant les parties réelles entre elles et les parties imaginaires entre elles, on obtient :

$$(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 4\cos\frac{5\pi}{12} \quad et \quad (\sqrt{6}+\sqrt{2}) = 4\sin\frac{5\pi}{12}$$

D'où

$$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} \quad et \quad \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$$

Exercice 2 :

La suite numérique (U_n) est définie sur N par : $U_0 = 0$ et la relation $U_{n+1} = \frac{2U_n+3}{U_n+4}$

1)

a- Montrons par récurrence que $\forall n \geq 1,\ 0 < U_n < 1$.

On a : $U_1 = \frac{2U_0+3}{U_0+4} = \frac{3}{4} \Rightarrow 0 < U_1 < 1$

Montrons que pour tout $k \geq 1,\ 0 < U_k < 1 \Rightarrow 0 < U_{k+1} < 1$

Soit k un entier naturel non nul. Supposons $0 < U_k < 1$. On a :

$$U_k > 0 \Rightarrow \frac{2U_k+3}{U_k+4} > 0 \Rightarrow U_{k+1} > 0 \qquad (1)$$

Par ailleurs, U_k étant positif,

$$U_k < 1 \Rightarrow 2U_k < 1 + U_k \Rightarrow 2U_k + 3 < U_k + 4 \Rightarrow \frac{2U_k+3}{U_k+4} < 1 \Rightarrow U_{k+1} < 1 \qquad (2)$$

$$(1)\ et\ (2) \Rightarrow 0 < U_{k+1} < 1$$

Comme pour tout $k \geq 1,\ 0 < U_k < 1 \Rightarrow 0 < U_{k+1} < 1$ et $0 < U_1 < 1$

Donc pour tout $n \geq 1$, on a : $0 < U_n < 1$

b- Montrons que la suite (U_n) est croissante

Soit $n \in N$ on a :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n+3}{U_n+4} - U_n = \frac{-U_n^2 - 2U_n + 3}{U_n+4}$$

Or pour tout $n \geq 1$, on a :

$$0 < U_n < 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < U_n^2 < 1 \\ 0 < 2U_n < 2 \\ U_n + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -U_n^2 - 2U_n + 3 > 0 \\ U_n + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-U_n^2 - 2U_n + 3}{U_n+4} > 0$$

De plus, $U_1 = \frac{3}{4}$ et $U_0 = 0 \Rightarrow U_1 > U_0$

D'où

55

Pour tout $n \in N$, on a : $U_{n+1} - U_n > 0$

Donc (U_n) est strictement croissante

2) Considérons la suite (V_n) définie par :
Pour tout n de N, $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}$
a- Montrer que la suite V_n est géométrique.

Pour tout n de N, on a :

$$V_0 = \frac{U_0 - 1}{U_0 + 3} = -\frac{1}{3}$$

Et

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 3}}{\frac{U_n - 1}{U_n + 3}} = \frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 3} \times \frac{U_n + 3}{U_n - 1} = \frac{\frac{2U_n + 3}{U_n + 4} - 1}{\frac{2U_n + 3}{U_n + 4} + 3} \times \frac{U_n + 3}{U_n - 1} = \frac{U_n - 1}{5U_n + 15} \times \frac{U_n + 3}{U_n - 1} = \frac{1}{5}$$

Donc (V_n) est une suite géométrique de premier terme $V_0 = -\frac{1}{3}$ et de raison $q = \frac{1}{5}$

b- En déduisons la limite de la suite V_n.

On a $q \in]0; 1[$ donc

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$$

3)
a- Exprimons U_n en fonction de V_n

On a :

$$V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3} \Rightarrow U_n - 1 = V_n(U_n + 3) \Rightarrow U_n(1 - V_n) = 3V_n + 1 \Rightarrow U_n = \frac{3V_n + 1}{1 - V_n}$$

b- En déduisons le comportement à l'infini de la suite (U_n).

Puisque

$$\lim_{n \to +\infty} V_n = 0 \quad alors \quad \lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{0 + 1}{1 - 0} = 1$$

Alors (U_n) converge vers 1

Problème :

A- On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$$g(x) = x^3 + \ln x - 1.$$

1) Etudions les variations de g.

$g(x)$ existe si et seulement si $x > 0$. Donc le domaine de définition de g est : $D_g =]0; +\infty[$

g est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions continues et dérivables sur $]0; +\infty[$ et quelque soit $x \in]0; +\infty[$,

$$g'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} = \frac{3x^3 + 1}{x}$$

Or pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a $x^3 > 0 \Rightarrow 3x^3 + 1 > 1$ et $x > 0$ d'où $\forall x \in]0;+\infty[$, $g'(x) > 0$

On en déduit que g est strictement croissante.

2) Déduisons en le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x

On a :

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^3 + \ln x - 1) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x-1) = -\infty$$

Et

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} (x^3 + \ln x - 1) = \lim_{x\to +\infty} x^3 = +\infty$$

Ainsi l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution réelle. De plus on remarque évidement que

$$g(1) = 1^3 + \ln 1 - 1 = 1 + 0 - 1 = 0$$

D'où le tableau de signe suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$		$+$	

B- On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x - 2\ln x}{2x}$$

1) Déterminons l'ensemble de définition de f.

$f(x)$ existe si et seulement si $x > 0$ et $2x \neq 0$ c'est-à-dire $x \in]0;+\infty[$: $D_f =]0;+\infty[$

2) déterminons la dérivée f' de f et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

f est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions continues et dérivables sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{2x\left(3x^2 - 4 - \frac{2}{x}\right) - 2(x^3 - 4x - 2\ln x)}{4x^2} = \frac{4x^3 - 8x + 8x - 4 + 4\ln x}{4x^2}$$

$$= \frac{4(x^3 + \ln x - 1)}{4x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

Donc f' est définie de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. Et :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{\ln x}{x} - 2\right) = +\infty \quad car \ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = -\infty; \ et \ \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

D'où le tableau de variation de f suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$		$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$

61

3) On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. (unité $2cm$).

a- Etudions la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à la courbe (P) d'équation $y = \frac{x^2}{2} - 2$.

On a :

$$f(x) - y = \frac{x^3 - 4x - 2\ln x}{2x} - \left(\frac{x^2}{2} - 2\right) = \frac{x^3 - 4x - 2\ln x - x^3 + 4x}{2x} = \frac{-2\ln x}{2x} = -\frac{\ln x}{x}$$

D'où $f(x) - y = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Ainsi : pour $x \in]0;1[$; $f(x) - y > 0 \Longrightarrow$ $(\mathcal{C})$ est au dessus de (P) et,

Pour $x \in]1;+\infty[$; $f(x) - y < 0 \Longrightarrow$ $(\mathcal{C})$est en dessous de (P)

b- Calculons

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y]$$

On a :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \to +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$$

On peut conclure que, (P) est une courbe asymptotique à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$

4) Tracé des courbes $(\mathcal{C})$ et (P) dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Voir fin de correction.

5) On désigne par $(\mathcal{C}_1)$ l'ensemble des points de $(\mathcal{C})$ d'abscisses supérieurs à 2.

a- Démontrons qu'il existe un pont d'intersection de $(\mathcal{C}_1)$ avec l'axe (Ox). Soit x_0 son abscisse.

f est continue et strictement croissante sur $]1;+\infty[$ et $]2;+\infty[\subset]1;+\infty[$ donc f est continue et strictement croissante sur $]2;+\infty[$. De plus,

$$f(2) = \frac{2^3 - 4 \times 2 - 2\ln 2}{2 \times 2} = -\frac{\ln 2}{2}$$

Or $2 > 1 \Rightarrow \ln 2 > 0$ d'où $f(2) < 0$. Par ailleurs, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Donc il existe un unique $x_0 \in]2;+\infty[$, $f(x_0) = 0$. D'où le point chercher est de coordonnées $(x_0;0)$

b- Déterminons une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 2.

Une équation à (T) est :

$$y = (f'(2))(x-2) + f(2) = \frac{(2^3 + \ln 2 - 1)}{2^2}(x-2) - \frac{\ln 2}{2} = \frac{7 - \ln 2}{4}x - \frac{7 - \ln 2}{2} - \frac{\ln 2}{2}$$
$$= \frac{7 - \ln 2}{4}x - \frac{7}{2}$$

Calculons l'abscisse x_1 du point d'intersection de (T) et (Ox).

$$y = 0 \Leftrightarrow \frac{7 - \ln 2}{4}x - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{7 - \ln 2}{4}} = \frac{7}{2} \times \frac{4}{7 - \ln 2} = \frac{14}{7 - \ln 2}$$

6) Soit α un nombre réel supérieur à x_1. Calculons en fonction de α ; l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre $(\mathcal{C})$; (P) et les droites d'équations $x = x_1$ et $x = \alpha$.

On a :

$A(\alpha) = \left(\int_{x_1}^{\alpha} (y - f(x))dx\right) u_A$ où u_A est l'unité d'aire : $u_A = 4cm^2$. On a :

$$\int_{x_1}^{\alpha} (y - f(x))dx = \int_{x_1}^{\alpha} \frac{\ln x}{x} dx$$

Posons :

$u = \ln x$ et $v = \ln x$ on a : $u' = \frac{1}{x}$ et $v' = \frac{1}{x}$. D'où $(uv)' = u'v + v'u = \frac{2\ln x}{x}$.

Ainsi :

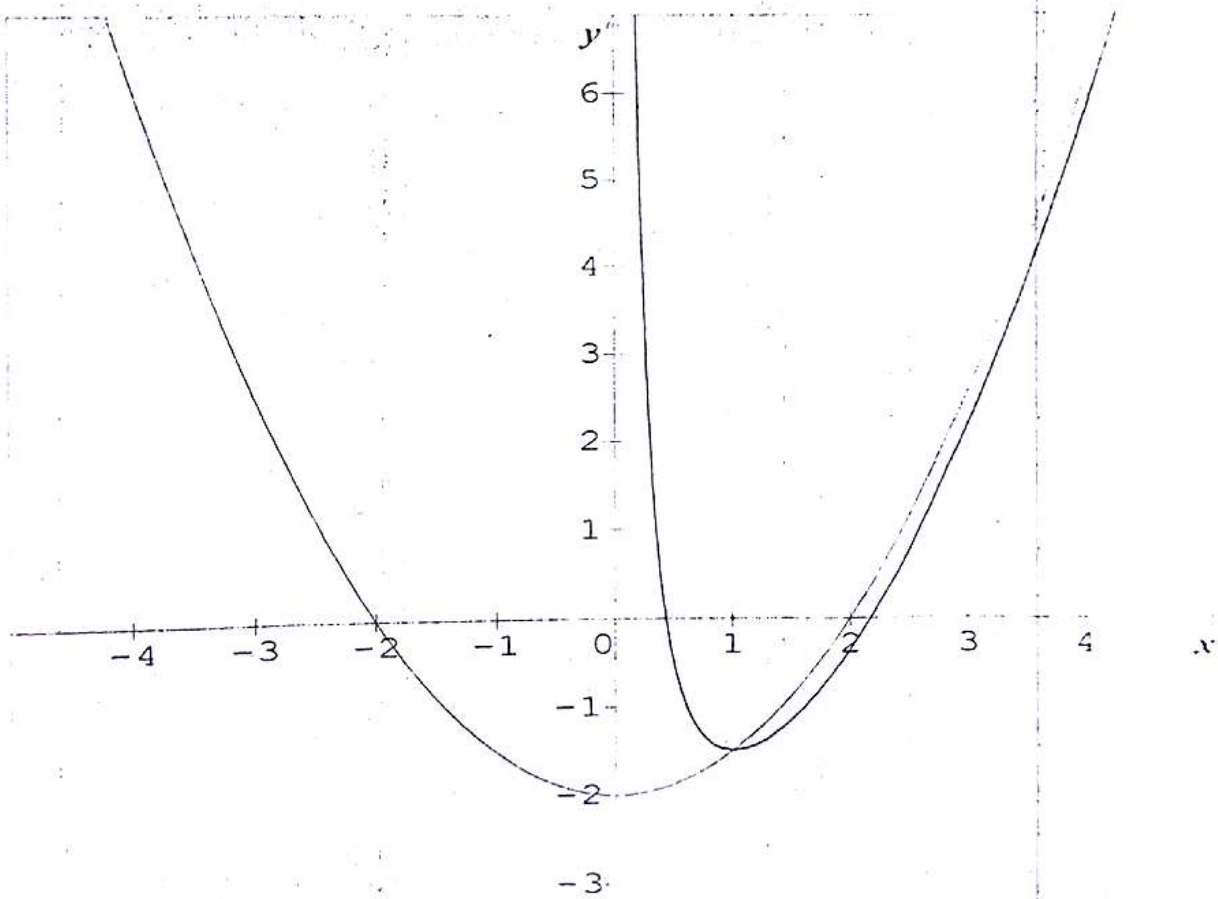
$$\int_{x_1}^{\alpha} (uv)'dx = [uv]^{\alpha}_{x_1} \Leftrightarrow \int_{x_1}^{\alpha} \frac{2\ln x}{x} dx = [\ln^2 x]^{\alpha}_{x_1} \Leftrightarrow \int_{x_1}^{\alpha} \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}[\ln^2 x]^{\alpha}_{x_1}$$

Donc

$$A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}\left[\ln^2 x\right]^{\alpha}_{x_1}\right) 4cm^2 = 2[\ln^2 x]^{\alpha}_{x_1} cm^2 = 2\left(\ln^2 \alpha - \ln^2\left(\frac{14}{7 - \ln 2}\right)\right) cm^2$$

7) Calcul de la limite de $A(\alpha)$ à $+\infty$:

$$\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha) = \lim_{\alpha \to +\infty} 2\ln^2 \alpha = +\infty$$



63

Baccalauréat de l'enseignement du second degré Session de juin 2009

Épreuve de mathématiques série D Durée 04 h coefficient 4

Exercice 1 :

On considère un dé rouge et un dé vert cubiques non pipés. Le dé rouge comporte deux faces numérotées -1; deux faces numérotées 0; deux faces numérotées 1. Le dé vert comporte une face numérotée 0; trois faces numérotées 1 et deux faces numérotées 2.

On lance les deux dés simultanément et on note X la somme des nombres lus sur les faces exposées.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Définir la fonction de répartition de X et la représenter graphiquement.
3) Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 2 :

On considère dans le corps C l'équation (E): $z^2 + (-6+i)z + 7 + 3i = 0$.

1) Résoudre dans C l'équation (E).
2) On note z_1 la solution de (E) dont une détermination de l'argument est $\frac{\pi}{4}$ et z_2 l'autre solution. Soit (P) le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé. Soit S la similitude directe du plan qui au point A d'affixe -2 associe le point B d'affixe 1 et au point H d'affixe z_1 associe le point K d'affixe z_2. Déterminer le centre, l'angle et le rapport de la similitude S.

Problème :

1) Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = (e^x - 2)^2 e^{2x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé.
   a) Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x)$; démontrer que la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe de f.
   b) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = 4e^{2x}(e^x - 1)(e^x - 2)$.
   c) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
   d) En prenant comme unité graphique $4cm$, construire (C_f).
2) Soit la fonction

$$F(x) = \int_{\ln 2}^{x} f(t)dt.$$

   a) Étudier le sens de variations de F
   b) Calculer $F(x)$.

12

Correction BAD D 2009

Exercice 1 :

Considérons un dé rouge et un dé vert cubiques non pipés. Le dé rouge comporte deux faces numérotées -1; deux faces numérotées 0; deux faces numérotées 1. Le dé vert comporte une face numérotée 0; trois faces numérotées 1 et deux faces numérotées 2.

On lance les deux dés simultanément et on note X la somme des nombres lus sur les faces exposées.

1) Déterminons la loi de probabilité de X.

Dé rouge	-1			0			1		
Probabilité	$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{3}$		
Dé vert	0	1	2	0	1	2	0	1	2
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
Somme	-1	0	1	0	1	2	1	2	3
Probabilité	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$

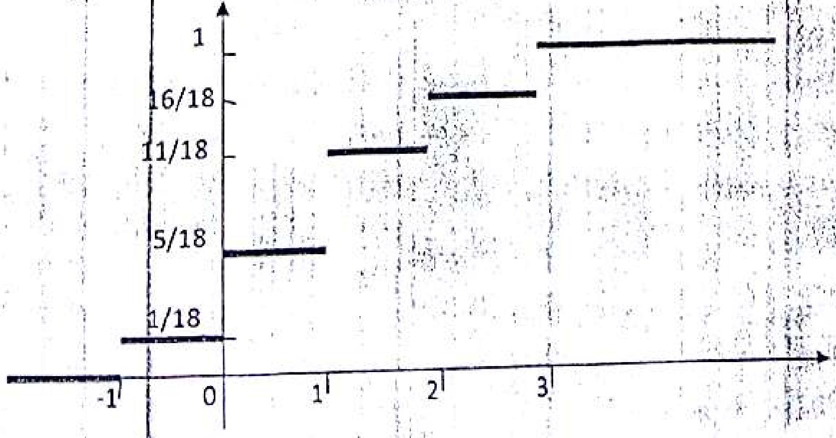
D'où la loi de probabilité de X suivante :

x_i	-1	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{18}$

2) Définissons la fonction de répartition de X et la représentons là graphiquement.

La fonction de répartition de X est définie par :

$$\begin{cases} F(x) = 0 & ,si\ x < -1 \\ F(x) = \frac{1}{18} & ,si -1 \leq x < 0 \\ F(X) = \frac{5}{18} & ,si\ 0 \leq x < 1 \\ F(X) = \frac{11}{18} & ,si\ 1 \leq x < 2 \\ F(X) = \frac{16}{18} & si\ 2 \leq x < 3 \\ F(X) = 1 & si\ 200 \leq x \end{cases}$$



3) Calcule de l'espérance mathématique de X.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i P_i = -\frac{1}{18} + \frac{0}{18} + \frac{6}{18} + \frac{10}{18} + \frac{6}{18} = \frac{-1+6+10+6}{18} = \frac{21}{18} = \frac{7}{6}$$

Exercice 2 :

Considérons dans le corps C l'équation (E): $z^2 + (-6+i)z + 7 + 3i = 0$.

1) Résolvons dans C l'équation (E).

On a : $(E) \Leftrightarrow z^2 + (-6+i)z + 7 + 3i = 0$ d'où $\Delta = (-6+i)^2 - 4(7+3i) = 35 - 12i - 28 - 12i = 7 - 24i$

Soit $\delta = a + ib$ une racine de Δ. On a :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 7 \\ 2ab = -24 \\ |\delta|^2 = |7-24i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 7 & (1) \\ b = -\dfrac{12}{a} & (2) \\ a^2 + b^2 = 25 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (3) \Longrightarrow 2a^2 = 32 \Leftrightarrow a = -4 \; ou \; a = 4$$

Pour $a = 4$, on a : $b = -\frac{12}{4} = -3$ et pour $a = -4$, on a $b = -\frac{12}{-4} = 3$

Donc les racines de Δ sont : $\delta_1 = 4 - 3i$ et $\delta_2 = -4 + 3i$

Par suite, les solutions de (E) sont :

$$z_1 = \frac{(6-i) - 4 + 3i}{2} = 1 + i \quad et \quad z_2 = \frac{(6-i) + 4 - 3i}{2} = 5 - 2i$$

Soit S l'ensemble solution de l'équation (E). On a :

$$S = \{1 + i; 5 - 2i\}$$

2) On note z_1 la solution de (E) dont une détermination de l'argument est $\frac{\pi}{4}$ et z_2 l'autre solution.

Soit (P) le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé. Soit S la similitude directe du plan qui au point A d'affixe -2 associe le point B d'affixe 1 et au point H d'affixe z_1 associe le point K d'affixe z_2. Déterminons le centre, l'angle et le rapport de la similitude S.

Soit M d'affixe z un point de (P) et M' d'affixe z' l'image de M par S

L'expression analytique de S est : $f: f(z) = z'$ $tel \; que \; z' = re^{i\theta}z + \beta$

Où

$r = \frac{|z_{\overline{BK}}|}{|z_{\overline{AH}}|}$; $\theta = \arg\left(\frac{z_{\overline{BK}}}{z_{\overline{AH}}}\right)$ et β est à déterminer.

On a : $z_{\overline{AH}} = z_H - z_A = 1 + i - (-2) = 3 + i$ et $z_{\overline{BK}} = z_K - z_B = 5 - 2i - 1 = 4 - 2i$ et $S_{\overline{AH}} = \overline{S_A S_H}$

D'où

66

$$r = \frac{|z_{\overline{BK}}|}{|z_{\overline{AH}}|} = \frac{\sqrt{4^2+2^2}}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{z_{\overline{BK}}}{z_{\overline{AH}}} = \frac{4-2i}{3+i} = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos -\frac{\pi}{4} + i\sin -\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi l'expression analytique de S est $z' = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}z + \beta$

$$S_A = B \Rightarrow f(-2) = 1 \Rightarrow -2\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}} + \beta = 1 \Rightarrow \beta = 1 + 2\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}} = 1 + 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= 1 + 2 - 2i = 3 - 2i$$

L'expression analytique de S est donc $z' = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}z + (3-2i)$

Soit Ω le centre de la similitude S et ω l'affixe de Ω

On a :

$$\omega = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}\omega + (3-2i) \Rightarrow \omega = \frac{3-2i}{1-\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}} = \frac{3-2i}{1-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{3-2i}{1-1+i}$$
$$= -2 - 3i$$

Ainsi S est la similitude centre Ω d'affixe ω tel que $\omega = -2-3i$; de rapport $r = \sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

Problème :

1) Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = (e^x - 2)^2e^{2x}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé.
   a) Calcule de la limite en $+\infty$ de $f(x)$.

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x - 2) = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

D'où

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x-2)^2 = +\infty \quad par\ ailleurs, \lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Démontrons que la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe de f.

On a :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^x-2)^2e^{2x} = \lim_{x\to-\infty}(e^{2x} - 4e^x + 4)e^{2x} = \lim_{x\to-\infty} 4e^{2x} = 0$$

Donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe de f.

   b) Démontrons que pour tout réel x, $f'(x) = 4e^{2x}(e^x-1)(e^x-2)$.

Baccalauréat de l'enseignement du second degré Session de juin 2010

Épreuve de mathématiques série D Durée 04 h coefficient 4

Exercice 1 :

On désigne par C l'ensemble des nombres complexes.

Soit le polynôme P de la variable complexe z tel que : $P(z) = z^3 + z^2 + (-5+4i)z - 21 + 12i$.

1- Calcul de $P(3)$ et mettre $P(z)$ sous la forme d'un produit de deux facteurs.
2- Résoudre dans C l'équation $P(z) = 0$.
3- Dans le plan complexe, soit les points A, B et C d'affixes respectives $3; -1-2i; -3+2i$.déterminer la similitude plane directe de centre A qui transforme B en C.

Exercice 2 :

On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée comme suit :

$X = x_i$	1	2	3
$P(X = x_i)$	¼	$\alpha - 1/3$	¼

1) Calculer la valeur de α.
2) Calculons : a) L'espérance mathématique de X. b) La variance X. c) L'écart type de X.

Problème :

1- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$.

a) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et étudier le sens de variation de f.
b) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.
c) Dresser le tableau de variation de la fonction f et en déduire le signe de $f(x)$ pour tout $f(x)$ pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$.
d) Le plan étant rapporté à un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ (unité $2cm$). Tracer la courbe $\mathcal{C}$ représentative de fonction f.

2- On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

a) Déterminer la fonction dérivée de la fonction g.
Déduire de la partie 1 , le sens de variation de g sur $]0;+\infty[$
b) Vérifier que $g = hok$ avec h et k les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} \quad et \quad k(x) = \frac{1}{x}$$

En déduire la limite de g en $+\infty$ et en 0
c) Dresser le tableau de variation de g sur $]0;+\infty[$

3- Soit α un nombre réel strictement supérieur à 1.

On note $A(\alpha)$ l'aire en cm^2 du domaine « ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient : $1 \leq x \leq \alpha$ et $0 \leq y \leq f(x)$ ».

a) Calculer $A(\alpha)$ en fonction de α.
b) Déterminer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

13

Correction BAC D2010

Exercice 1 :

Désignons par C l'ensemble des nombres complexes.

Soit le polynôme P de la variable complexe z tel que $P(z) = z^3 + z^2 + (-5+4i)z - 21 - 12i$

1- Calcul de $P(3)$

On a : $P(3) = 3^3 + 3^2 + 3(-5+4i) - 21 + 12i = 27 + 9 - 15 - 21 + 12i - 12i = 0$

Mettons $P(z)$ sous la forme d'un produit de deux facteurs.

Comme $P(3) = 0$ alors il existe $a ; b ; c$ appartenant à C tel que $P(z) = (z-3)(az^2 + bz + c)$.
Or

$$(z-3)(az^2+bz+c) = az^3 + (b-3a)z^2 + (c-3b)z - 3c.$$

Par identification des coefficients, on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = 1 \\ c - 3b = -5 + 4i \\ -3c = -21 - 12i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 7 + 4i \end{cases}.$$

Ainsi $P(z) = (z-3)(z^2 + 4z + 7 + 4i)$

2- Résolvons dans C l'équation $P(z) = 0$.

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 3 = 0 \ ou \ z^2 + 4z + 7 + 4i = 0$$

Résolvons dans C léquation $z^2 + 4z + 7 + 4i = 0$:

On a : $\Delta = 4^2 - 4(7+4i) = -12 - 16i$.

Soit $\delta = x + iy$ une racine de Δ . Nous avons

$$(x+iy)^2 = -12 - 16i \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -12 \\ 2xy = -16 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -12 & (1) \\ y = -\dfrac{8}{x} & (2) \\ x^2 + y^2 = 20 & (3) \end{cases}$$

En sommant (1) et (3) ,on obtient :

$$2x^2 = 8$$

On en déduit que : $x_1 = -2$ ou $x_2 = 2$.

Pour $x = x_1 = -2$, $y = y_1 = 4$ et $\delta = \delta_1 = -2 + 4i$.

Pour $x = x_2 = 2$, $y = y_2 = -4$ et $\delta = \delta_2 = 2 - 4i$

D'où

$$z_1 = \frac{-4 - 2 + 4i}{2} = -3 + 2i \quad et \quad z_2 = \frac{-4 + 2 - 4i}{2} = -1 - 2i$$

Soit S l'ensemble solution de l'équation $P(z) = 0$ on a :

$$S = \{3; -3 + 2i; -1 - 2i\}$$

67

3- Dans le plan complexe, soit les points A, B et C d'affixes respectives $3; -1-2i; -3+2i$.
Déterminons la similitude plane directe de centre A qui transforme B en C.

Posons : $z' = re^{i\theta}z + \beta$ l'expression analytique de la similitude plane directe de centre A qui transforme B en C.

On a :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = -1-2i-3 = -4-2i \; ; \quad z_{\overrightarrow{AC}} = -3+2i-3 = -6+2i$$

D'où

$$\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{-6+2i}{-4-2i} = \frac{6-2i}{4+2i} = \frac{(6-2i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \frac{24-4-12i-8i}{16+4} = 1-i = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

On en déduit que $z' = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}z + \beta$. Comme A est le centre de cette similitude, alors $z'_A = z_A$.

Ainsi :

$$3\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}} + \beta = 3 \Rightarrow \beta = 3\left(1-\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}\right) = 3\big(1-(1-i)\big) = 3i$$

Cette similitude est donc la composée de la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de l'homothétie de centre A et de rapport $r = \sqrt{2}$ et, son expression analytique est :

$$z' = \left(\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)z + 3i = (1-i)z + 3i$$

Exercice 2 :

Considérons la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée comme suit :

$X = x_i$	1	2	3
$P(X = x_i)$	¼	$\alpha - 1/3$	¼

1) Calculons la valeur de α.

On a :

$$\sum_{i=1}^{3} P(X = x_i) = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \alpha - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \alpha = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

2) Calculons :

a) L'espérance mathématique de X.

L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P(x_i) = 1 \times \frac{1}{4} + 2\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right) + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + 1 + \frac{3}{4} = 2$$

b) La variance de X.

La variance de X est :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{3} \big(x_i - E(X)\big)^2 P_i = \frac{1}{4}(1-2)^2 + \frac{1}{2}(2-2)^2 + \frac{1}{4}(3-2)^2 = \frac{1}{2}$$

c) L'écart type de X.

L'écart type de X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Problème :

1- Considérons la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$

a) Déterminons la fonction dérivée de la fonction f et étudier le sens de variation de f

f est continue et dérivable dans $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions continues et dérivables dans $]0;+\infty[$ et pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\frac{(x+1)}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x-(x+1)}{x^2} \times \frac{x}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{-(x+1)+x}{x(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2}$$

Sens de variation de f.

Quel que soit $x \in]0;+\infty[$, on a $x > 0$; $x+1 > 0$ d'où $-\frac{1}{x(x+1)} < 0$ c'est-à-dire $f'(x) < 0$. On en déduit que f est strictement décroissante dans $]0;+\infty[$

b) Calculons la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.

On a :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln\frac{1}{x} - 1\right) = \lim_{x\to +\infty} \ln x - 1 = +\infty$$

Calculons la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. On a :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\ln\frac{x}{x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left[\left(-\frac{1}{x}\right) + \ln 1\right] = 0 + 0 = 0$$

c) Tableau de variation de la fonction f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

On en déduit que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f(x) \in]0;+\infty[$ d'où $f(x) > 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$

d) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité $2cm$). Tracer la courbe C représentative de fonction f. Voir page suivante.

2- considérons la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

a) Déterminons la fonction dérivée de la fonction g.

g est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions continues et dérivables sur $]0+\infty[$ et pour tout $x\in]0;+\infty[$,

$$g'(x)=\left(x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)'=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+x\,\frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\frac{x+1}{x}}=\ln\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x^2}\left(\frac{x}{x+1}\right)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$$
$$=f(x)$$

Déduisons de la partie 1, le sens de variation de g sur $]0;+\infty[$

D'après la première partie du problème, $\forall x\in]0;+\infty[\,,f(x)>0$. De plus $g'(x)=f(x)$. On en déduit que g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

b) Vérifions que $g=hok$ avec h et k les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par :

$$h(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}\quad et\quad k(x)=\frac{1}{x}$$

On a :

- k est définie sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $k(x)\in]0;+\infty[$
- h est définie sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions définies sur $]0;+\infty[$
- Pour tout $x\in]0;+\infty[$, on a :

$$(hok)(x)=h(k(x))=\frac{\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)}{\frac{1}{x}}=x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=g(x)$$

On peut conclure que $g=hok$

Déduisons en les limites de g en $+\infty$ et en 0

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}h(k(x))=\lim_{x\to0^+}h(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}=1;$$

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}h(k(x))=\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

c) Tableau de variation de g sur $]0;+\infty[$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1

3. Soit α un nombre réel strictement supérieur à 1.

Notons $A(\alpha)$ l'aire en cm^2 du domaine « ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient : $1\le x\le\alpha$ et $0\le y\le f(x)$ ».

a) Calculer $A(\alpha)$ en fonction de α.

On a :

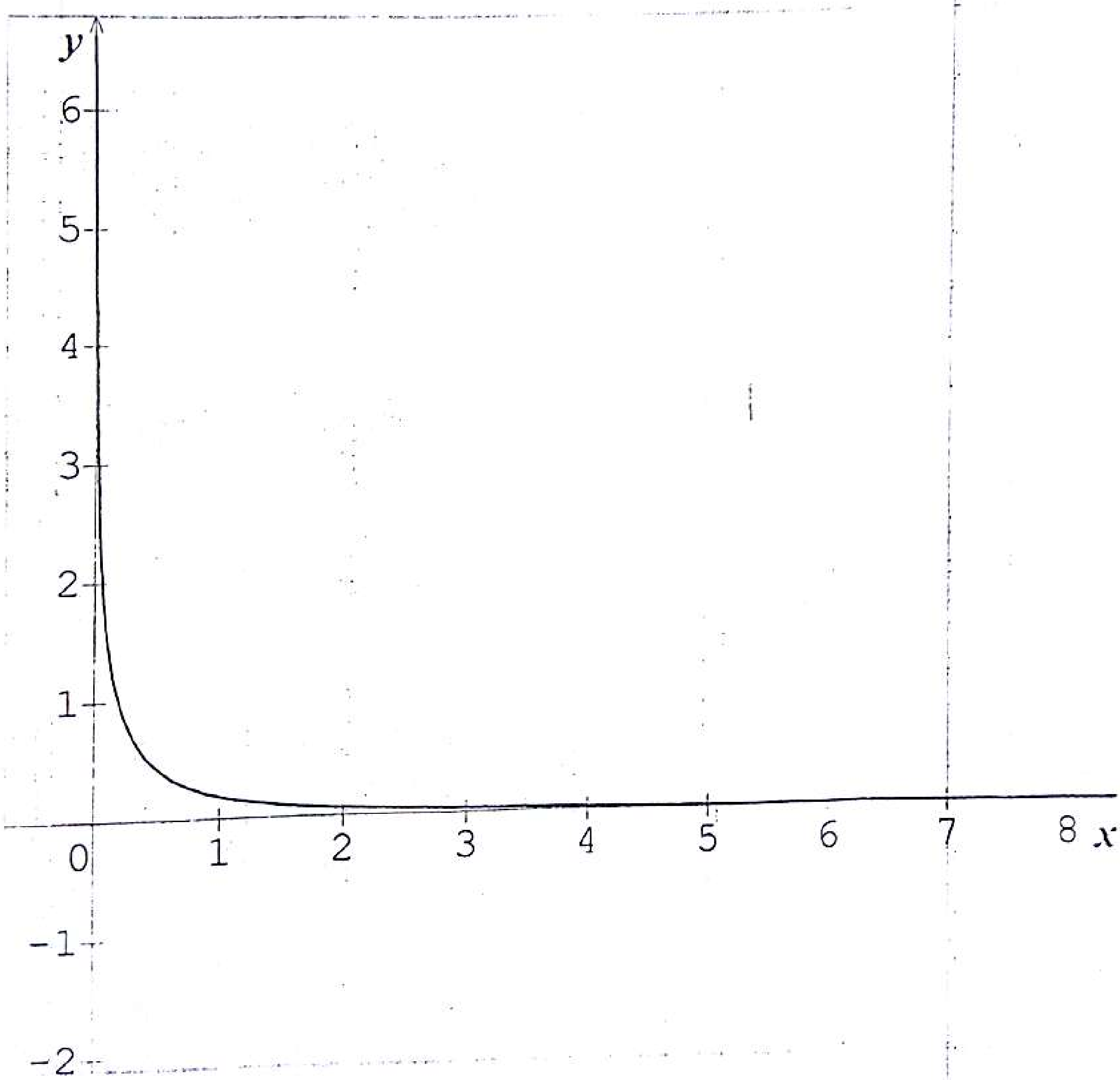
$$\int_1^{\alpha} f(x)dx = [g(x)]_1^{\alpha} = g(\alpha) - g(1) = \alpha \ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) - \ln\left(\frac{1+1}{1}\right) = \alpha \ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) - \ln 2$$

D'où

$$A(\alpha) = \left(\int_1^{\alpha} f(x)dx\right) u_A = 4\left(\alpha \ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) - \ln 2\right) cm^2 \quad car \quad u_A = 4cm^2$$

b) Déterminons la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

$$\lim_{\alpha\to+\infty} A(\alpha) = 4\left(\lim_{\alpha\to+\infty} g(\alpha) - \ln 2\right) cm^2 = 4(1-\ln 2)cm^2 = 4\ln\left(\frac{e}{2}\right) cm^2$$



Baccalauréat de l'enseignement du second degré Session de juin 2011

Épreuve de mathématiques série D Durée 04 h coefficient 4

Exercice 1 :

A- On considère l'équation (E): $z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0$ où z est un nombre complexe.

1. Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.
2. Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z,
$$z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i)(az^2+bz+c)$$
3. En déduire les solutions de l'équation (E).

B- Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i; $2+3i$; $2-3i$.

1. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point A' image du point A par la rotation r.
2. Démontrer que les points A', B et C sont alignés et déterminer l'écriture de l'homothétie de centre B qui transforme C en A'.

Exercice 2 :

On considère la suite (U_n) définie par :

$U_0=1$; $U_1=2$ et $U_{n+2}=\frac{3}{2}U_{n+1}-\frac{1}{2}U_n \quad \forall n\in N$

Soit la suite (V_n) définie par $V_n=U_{n+1}-U_n$, $\forall n\in N$

1. Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique. Exprimer V_n en fonction de n.
2. En déduire le terme général de la suite U_n en fonction de n.
3. Quelle est la limite de U_n ?

Problème :

Soit g la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} g(0)=1 \\ g(x)=\frac{\ln(1+x)}{x} & si\ x>0 \end{cases}$

1) Justifier la dérivabilité de g sur $]0;+\infty[$ et démontrer que pour tout x strictement positif : $g'(x)=\frac{h(x)}{x^2}$ où $h(x)=\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)$.
2) Déterminer les variations de h sur $]0;+\infty[$ en déduire celle de g .
3) Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$
4)
   a) Démontrer que g est continue sur $[0;+\infty[$.
   b) Démontrer que pour tout élément x de $[0;+\infty[$:
   $$x-\frac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}.$$
   c) En déduire un encadrement de $\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$
   d) Utiliser cette encadrement pour démontrer que g est dérivable en 0 et déterminer $g'(0)$.
5) Dresser le tableau de variation de g et construire la courbe représentative (C) de g dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Correction BAC 2011 :

Exercice 1 :

A- Considérons l'équation (E): $z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=0$ où z est un nombre complexe.

1. Démontrons que le nombre complexe i est solution de cette équation.

On a : $i^3-(4+i)i^2+(13+4i)i-13i=-i+4+i+13i-4-13i=4-4+12i-12i=0$.
Donc i est une solution de (E)

2. Déterminons les nombres complexes a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z,

$$z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i)(az^2+bz+c)$$

On a :

$$(z-i)(az^2+bz+c)=az^3+(b-ia)z^2+(c-ib)z-ic$$

Par identification des coefficients des expressions $z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i$ et $az^3+(b-ia)z^2+(c-ib)z-ic$, on obtient :

$$\begin{cases} a=1 \\ -(4+i)=b-ia \\ 13+4i=c-ib \\ 13i=ic \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=13 \end{cases}$$

3. Déduisons-en les solutions de l'équation (E).

D'après ce qui précède, $z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i=(z-i)(z^2-4z+13)$ d'où

$$(E)\Leftrightarrow(z-i)(z^2-4z+13)=0\Leftrightarrow z=i \ \ ou \ \ (z^2-4z+13)=0$$

Résolvons $(z^2-4z+13)=0$

$$\Delta=(-4)^2-4\times 13=-36$$

Les racines de Δ sont : $\delta_1=-6i \ \ et \ \ \delta_2=6i$

On en déduit les solutions de $(z^2-4z+13)=0$ suivantes :

$$z_1=\frac{4-6i}{2}=2-3i \ \ et \ \ z_2=\frac{4+6i}{2}=2+3i$$

Soit S l'ensemble solution de (E) on a :

$$S=\{i;\ 2-3i;\ 2+3i\}$$

B- Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives i; $2+3i$; $2-3i$.

1. Soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminons l'affixe du point A' image du point A par la rotation r.

On a :

$$\frac{z_{\overrightarrow{BA'}}}{z_{\overrightarrow{BA}}}=e^{\frac{i\pi}{4}}\Leftrightarrow\frac{z_{A'}-z_B}{z_A-z_B}=e^{\frac{i\pi}{4}}\Leftrightarrow z_{A'}=e^{\frac{i\pi}{4}}(z_A-z_B)+z_B=e^{\frac{i\pi}{4}}(i-(2+3i))+2+3i$$
$$=-e^{\frac{i\pi}{4}}(2+2i)+2+3i=-2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}.e^{\frac{i\pi}{4}}+2+3i=-2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{2}}+2+3i=$$
$$=2-2i\sqrt{2}+3i=2+i\left(3-2\sqrt{2}\right)$$

Scanned by CamScanner

$$z_{A'} = 2 + i(3 - 2\sqrt{2})$$

2. Démontrons que les points A', B et C sont alignés.

On a :

$$\frac{z_{\overrightarrow{BA'}}}{z_{\overrightarrow{BC}}} = \frac{z_{A'} - z_B}{z_C - z_B} = \frac{\left(2 + i(3 - 2\sqrt{2}) - (2 + 3i)\right)}{(2 - 3i) - (2 + 3i)} = -\frac{2i\sqrt{2}}{-6i} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Comme $\frac{z_{\overrightarrow{BA'}}}{z_{\overrightarrow{BA}}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ est un nombre réel non nul, on peut conclure que les points A'; B et C sont alignés

Et l'écriture de l'homothétie de centre B qui transforme C en A'est :

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{3}(z - z_B) + z_B \Leftrightarrow z' = \frac{\sqrt{2}}{3}z + \frac{-2\sqrt{2} + 6}{3} + i(3 - \sqrt{2})$$

Exercice 2 :

Considérons la suite (U_n) définie par :

$U_0 = 1$; $U_1 = 2$ et $U_{n+2} = \frac{3}{2}U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n \quad \forall n \in N$

Soit la suite (V_n) définie par $V_n = U_{n+1} - U_n$, $\forall n \in N$

1. Montrons que la suite (V_n) est une suite géométrique.

On a :

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+2} - U_{n+1}}{(U_{n+1} - U_n)} = \frac{\frac{3}{2}U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n - U_{n+1}}{U_{n+1} - U_n} = \frac{\frac{1}{2}(U_{n+1} - U_n)}{U_{n+1} - U_n} = \frac{1}{2}$$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

Exprimons V_n en fonction de n.

On a :

L'expression générale d'une suite géométrique de premier terme V_0 et de raisons q est

$V_n = V_0 q^n$. Ici, $V_0 = U_1 - U_0 = 2 - 1 = 1$; et $q = \frac{1}{2}$ d'où

$$V_n = \frac{1}{2^n}$$

2. Déduisons-en le terme général de la suite U_n en fonction de n.

On a : $V_n = U_{n+1} - U_n$. D'où

$$U_n - U_0 = (U_n - U_{n-1}) + (U_{n-1} - U_{n-2}) + \cdots + (U_2 - U_1) + (U_1 - U_0)$$

$$= V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} V_i = \frac{V_0(1-q^n)}{1-q} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

3. déterminons la limite de U_n

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2$$

Problème :

Soit g la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} g(0) = 1 \\ g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} & si\ x > 0 \end{cases}$

1) Justifier la dérivabilité de g sur $]0;+\infty[$

La fonction $\ln(1+x)$ et la fonction $\frac{1}{x}$ sont continues et dérivables sur $]0;+\infty[$. D'où g est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions continues et dérivables sur $]0;+\infty[$

Démontrons que pour tout x strictement positif : $g'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ où $h(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$.

Soit $x \in]0;+\infty[$ on a :

$$g'(x) = \frac{x(\ln(1+x))' - (x)'\ln(1+x)}{x^2} = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$$

2) Etudions les variations de h sur $]0;+\infty[$

h est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions continues et dérivables sur $]0;+\infty[$. Et pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$h'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1-(1+x)}{(1+x)^2} = -\frac{x}{(1+x)^2}$$

D'où pour tout $x \in]0;+\infty[$, $h'(x) < 0$ car $x > 0$; $(1+x)^2 > 0$.

Donc h est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

Déduisons-en les variations de g .

On a : $g'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $h(x)$. Par ailleurs,

$$\lim_{x\to0^+} h(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)\right) = 0 - 0 = 0$$

Et

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x} - \ln x\right) = \lim_{x\to+\infty}(-\ln x) = -\infty$$

h étant strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, on en déduit que $h(]0;+\infty[) =]-\infty;0[$ ainsi, pour $x \in]0;+\infty[$, $h(x) < 0$ c'est-à-dire $g'(x) < 0$.

On en déduit que g est strictement décroissante.

3) Déterminons la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$$

4)

a) Démontrons que g est continue sur $[0;+\infty[$.

On a justifié que g était continue sur $]0;+\infty[$. Il nous reste d'étudier la continuité de g en 0. On a :

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = 0 = g(0)$$

Donc g est continue en 0.

b) Soit $x \in [0;+\infty[$; démontrons que

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

On a : pour $x = 0$, $x - \frac{x^2}{2} = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ (1)

Pour $x \in]0;+\infty[$, étudions le signe de $\left(x - \frac{x^2}{2}\right) - \ln(1+x)$ puis celui de $\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \ln(1+x)$.

Posons :

$$k(x) = \left(x - \frac{x^2}{2}\right) - \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$$

On a : pour $x \in]0;+\infty[$

$$k'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-x(1+x)-1}{1+x} = -\frac{x^2}{1+x} < 0$$

Donc k est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} k(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}x^2 = -\infty$$

Et $\lim_{x\to0^+} k(0) = 0$. Donc k réalise une bijection de $]0;+\infty[$ vers $]-\infty;0[$.

On en déduit que quel que soit $x \in]0;+\infty[$, $k(x) < 0$. D'où :

$$\left(x - \frac{x^2}{2}\right) < \ln(1+x) \qquad (2)$$

Posons :

$$l(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \ln(1+x)$$

On a : pour $x \in]0;+\infty[$

$$l'(x) = 1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x} = \frac{1 + x - x(1+x) + x^2(1+x) - 1}{1+x} = \frac{x^3}{1+x} > 0$$

Donc l est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. De plus,

$$\lim_{x \to +\infty} l(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3} - \frac{\ln(1+x)}{x^3}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{3}x^3 = +\infty$$

Et $k(0) = 0$. Donc k réalise une bijection de $]0; +\infty[$ vers $]0; +\infty[$.

On en déduit que quel que soit $x \in]0; +\infty[$, $l(x) > 0$. D'où :

$$\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \qquad (3)$$

(1); (2) et (3) montrent que pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

c) Déduisons-en un encadrement de $\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$. On a :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \Rightarrow -\frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) - x \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$$

d) Démontrons que g est dérivable en 0 et déterminons $g'(0)$.

On a :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(g(x) - g(0))}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{g(x) - 1}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

Par ailleurs,

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$$

Et

$$\lim_{x \to 0^+}\left(-\frac{1}{2} + \frac{x}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(g(x) - g(0))}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

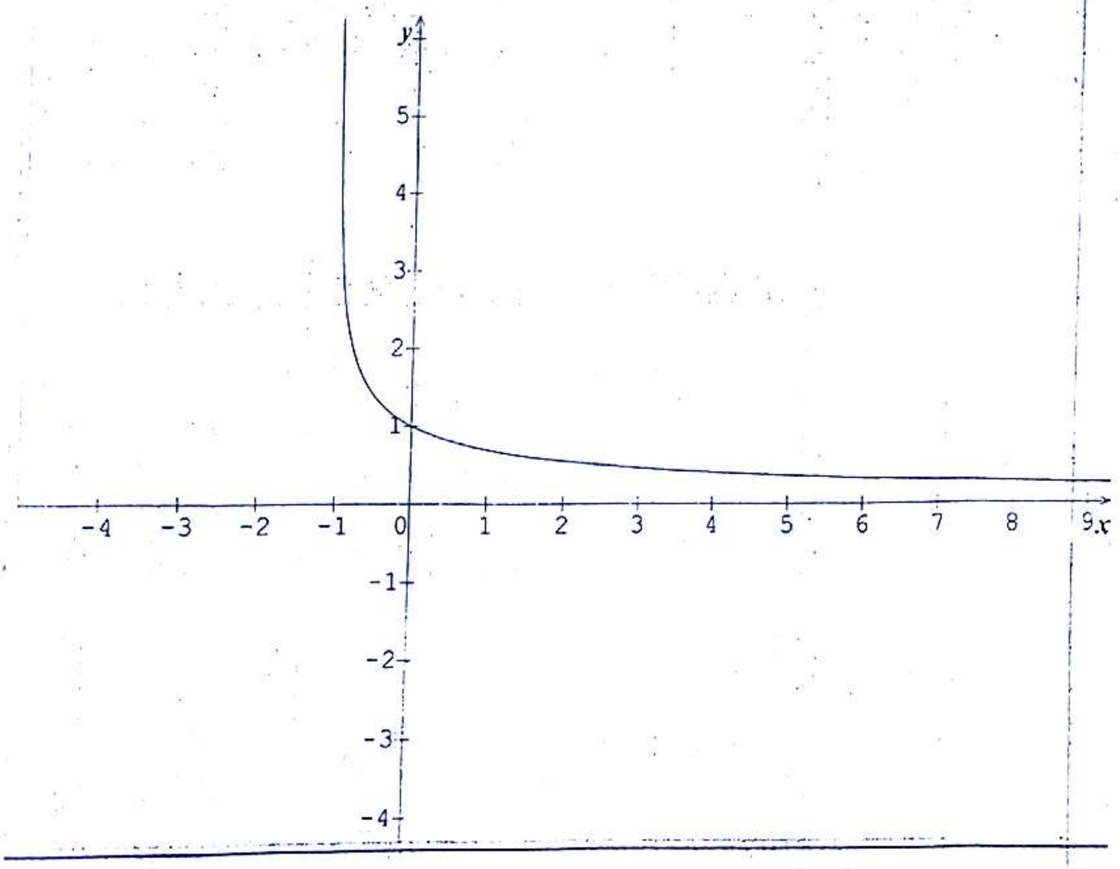
Ainsi, g est dérivable en 0 et $g'(0) = -\frac{1}{2}$

5) Tableau de variation de g .

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$1 \searrow 0$

Construction de la courbe représentative $(\mathcal{C})$ de g dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

NB dans cette courbe, la partie pour laquelle $x < 0$ n'est pas à considérer car g est définie dans $[0;+\infty[$



Lycée Etoile Polaire

Baccalauréat de l'enseignement du second degré Session de juin 2012

Épreuve de mathématiques série D Durée 04 h coefficient 4

Exercice 1 : On lance un dé truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

La loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous :

Face	1	2	3	4	5	6
probabilité	1/12	a	¼	1/12	1/3	1/12

a) Déterminer a ;

b) Calculer l'espérance mathématiques, la variance et l'écart type de cette loi de probabilité

Exercice 2 :

1) soit l'application $P: C \to C$ telle que

$$z \to P(z) = z^3 + (-7+3i)z^2 + (12-16i)z + 4(1+7i)$$

On se propose de résoudre dans C l'équation (E) définie par $P(z) = 0$

a) Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0.

b) Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = (z - z_0)(z^2 + az + b)$

c) Résoudre l'équation (E)

2) Soit A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives $1+i$ et $-1+i\sqrt{3}$;

a) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S de centre O qui transforme A en B, ainsi que ses éléments caractéristiques ;

b) Déterminer l'expression analytique de S .

Problème

On considère la fonction g définie par $g(x) = x^3 + \ln x - 1$

1) Étudier les variations de g ;

2) A) Calculer $g(1)$. B) En déduire le signe de $g(x)$.

3) On considère la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{(x^3-4x-2\ln x)}{2x}$ et (C) sa courbe représentative ; unité $2cm$; déterminer le domaine de définition de f;

4) Calculer la dérivée $f'(x)$ de f et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$; en déduire le tableau de variation de f

5)

a) Étudier la position de (C) par rapport à la courbe (P): $y = \frac{x^2}{2} - 2$

b) Calculer la limite en $+\infty$ de $[f(x) - y]$; que peut on conclure ?

6) On désigne par (C_1) l'ensemble des points de (C) d'abscisses supérieures à 2

a) Démontrer qu'il existe un point d'intersection d'abscisse x_0 de (C_1) avec l'axe des abscisses. Montre que $x_0 \in [2; 3]$.

b) Déterminer la pente de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 2

7) Tracer (P) et (C) dans un même repère.

8) Soit $\alpha > 2$

a) Calculer en fonction de α l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan délimitée par les courbes (P) ; (C) et les droites d'équations $x = 2$ et $x = \alpha$

b) Calculer

$$\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$$

1 5

Correction BAC D 2012

Exercice 1 :

On lance un dé truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

La loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous :

Face	1	2	3	4	5	6
probabilité	1/12	a	1/4	1/12	1/3	1/12

a) déterminons α ;

On a :

$$P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=1 \Rightarrow P(2)=\alpha=1-\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right);$$

$$\alpha=\frac{1}{6}$$

b) L'espérance mathématique de cette loi est :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{6}x_iP_i=\frac{1}{12}+\frac{4}{12}+\frac{9}{12}+\frac{4}{12}+\frac{20}{12}+\frac{6}{12}=\frac{44}{12}=\frac{11}{3}$$

La variance de cette loi est :

$$\begin{aligned}V(X)&=\sum_{i=1}^{6}\left(x_i-E(X)\right)^2P_i\\
&=\frac{1}{12}\left(1-\frac{11}{3}\right)^2+\frac{2}{12}\left(2-\frac{11}{3}\right)^2+\frac{3}{12}\left(3-\frac{11}{3}\right)^2+\frac{1}{12}\left(4-\frac{11}{3}\right)^2\\
&+\frac{4}{12}\left(5-\frac{11}{3}\right)^2+\frac{1}{12}\left(6-\frac{11}{3}\right)^2\\
&=\frac{1}{12}\left[\left(-\frac{8}{3}\right)^2+2\left(-\frac{5}{3}\right)^2+3\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{7}{3}\right)^2\right]\\
&=\frac{64+50+12+1+64+49}{108}=\frac{240}{108}=\frac{20}{9}\end{aligned}$$

L'écart type de cette loi de probabilité est :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$$

Exercice 2 :

1) Soit l'application $P: C \to C$ telle que

$$z \to P(z)=z^3+(-7+3i)z^2+(12-16i)z+4(1+7i)$$

On se propose de résoudre dans C l'équation (E) définie par $P(z)=0$

a) Montrons que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0.

Soit $y \in \mathbb{R}^*$, iy est solution de $P(z)=0$ si et seulement si :

$$(iy)^3 + (-7+3i)(iy)^2 + (12-16i)iy + 4(1+7i) = 0$$
$$\Leftrightarrow -iy^3 + 7y^2 - 3iy^2 + 12iy + 16y + 4 + 28i = 0$$
$$\Leftrightarrow (7y^2 + 16y + 4) + i(-y^3 - 3y^2 + 12y + 28) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7y^2 + 16y + 4 = 0 & (1) \\ y^3 + 3y^2 - 12y - 28 = 0 & (2) \end{cases}$$

Pour l'équation (1), $\Delta = 16^2 - 4 \times 7 \times 4 = 144 = 12^2$

D'où $y = \frac{-16-12}{14} = -2$ ou $y' = \frac{-16+12}{14} = -\frac{2}{7}$

Remplaçons y par ses valeurs dans (2) on obtient :

- Pour $y = -2$, $-8 + 12 + 24 - 28 = -36 + 36 = 0$
- pour $y = -\frac{2}{7}$, $-\frac{8}{343} + \frac{12}{49} - \frac{24}{7} + 28 = \frac{-8+84-1176+9604}{343} = \frac{8504}{343} \neq 0$

Ainsi l'unique solution imaginaire pure de l'équation $P(z) = 0$ est : $z_0 = -2i$

b) Déterminons les réels a et b tels que $P(z) = (z+2i)(z^2 + az + b)$

On a :

$P(z) = (z+2i)(z^2 + az + b) = z^3 + (a+2i)z^2 + (b+2ai)z + 2bi$ et

$$P(z) = z^3 + (-7+3i)z^2 + (12-16i)z + 4(1+7i)$$

En identifiant les coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a + 2i = -7 + 3i \\ b + 2ai = 12 - 16i \\ 2bi = 4 + 28i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -7 + i \\ b = -2(-7+i)i + 12 - 16i \\ b = 14 - 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -7 + i \\ b = 14 - 2i \end{cases}$$

c) Résolution de l'équation (E)

On a :

$$(E) \Leftrightarrow P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+2i)(z^2 + az + b) = 0 \Leftrightarrow (z+2i)(z^2 + (-7+i)z + 14 - 2i) = 0$$

D'où : $z = -2i$ ou $z^2 + (-7+i)z + 14 - 2i = 0$.

Pour $z^2 + (-7+i)z + 14 - 2i = 0$, on a :

$$\Delta = (-7+i)^2 - 4(14-2i) = 48 - 14i - 56 + 8i = -8 - 6i$$

Soit $\delta = x + iy$ une racine carrée de Δ ; on a :

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = -8 - 6i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ xy = -3 \\ |\delta|^2 = |-8-6i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 & (1) \\ y = -\frac{3}{x} & (2) \\ x^2 + y^2 = 10 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (3) \Longrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$

Pour $x = 1$, on a : $y = -\frac{3}{1} = -3$ et pour $x = -1$, on a $y = -\frac{3}{-1} = 3$

Donc les racines de Δ sont : $\delta_1 = 1 - 3i$ et $\delta_2 = -1 + 3i$

Par suite, les solutions de (E) sont :

$$z_1 = \frac{7 - i + 1 - 3i}{2} = 4 - 2i \quad et \quad z_2 = \frac{7 - i - 1 + 3i}{2} = 3 + i$$

Soit S l'ensemble solution de (E) on a :

$$S = \{ -2i \ ; \ 4 - 2i \ ; \ 3 + i \}$$

2) Soit A et B deux points du plan complexe d'affixes respectives $1 + i$ et $-1 + i\sqrt{3}$;

a) Déterminons l'écriture complexe de la similitude directe S de centre O qui transforme A en B, ainsi que ses éléments caractéristiques.

On a :

$$z_{\overrightarrow{OA}} = 1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} \quad et \quad z_{\overrightarrow{OB}} = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

D'où

$$\frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}} = \frac{2e^{\frac{2i\pi}{3i}}}{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{12}}$$

On en déduit que S est la similitude de centre $O(0;0)$ de rapport $k = \sqrt{2}$ et d'angle $\theta = \frac{5\pi}{12}$

b) Déterminons l'expression analytique de S.

L'expression analytique de S est

$$z' = ke^{i\theta}z + \beta = \sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{12}}z + \beta$$

Avec $\beta = 0$ car le point O d'affixe 0 est le point invariant de cette similitude.

$$z' = \sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{12}}z$$

Problème

Considérons la fonction g définie par $g(x) = x^3 + \ln x - 1$

1) Etudions les variations de g ;

Le domaine de définition de g est $]0; +\infty[$.

Dérivée et signe de la dérivée :

g est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions continues et dérivables sur $]0; +\infty[$. Et quelque soit $x \in]0; +\infty[$,

$$g'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$$

Or quel que soit $]0; +\infty[$, $x^2 > 0$ et $\frac{1}{x} > 0$ d'où :

Quel que soit $]0; +\infty[$, $g'(x) > 0$

Variation de g

On déduit du signe de $g'(x)$ que g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

2) A) Calcul de $g(1)$.

$$g(1) = 1^3 + \ln 1 - 1 = 1 + 0 - 1 = 0$$

B) Déduisons-en le signe de $g(x)$.

g étant strictement croissante, g réalise une bijection de $]0;+\infty[$ vers $;]-\infty;+\infty[$. car

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \ .$$

Ainsi l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$ est le nombre 1. On en déduit le tableau de signe de $g(x)$ suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	|	$+$	

3) Considérons la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^3-4x-2\ln x}{2x}$ et (C) sa courbe représentative ; unité $2cm$; déterminons le domaine de définition de f;

Le domaine de définition de f est $D_f =]0;+\infty[$

4) Calculons la dérivée $f'(x)$ de f et vérifier que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

f est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues et dérivables sur $]0;+\infty[$. Et pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{2x\left(3x^2 - 4 - \frac{2}{x}\right) - 2(x^3 - 4x - 2\ln x)}{4x^2} = \frac{4x^3 - 4 + 4\ln x}{4x^2} = \frac{x^3 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

Tableau de variation de f .

Par ailleurs, on a :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\ln x}{x} = +\infty \quad ; \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2x}\right) = +\infty \quad et \quad f(1) = -3$$

D'où :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	|	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

5)

a) Etudions la position de (C) par rapport à la courbe (P): $y = \frac{x^2}{2} - 2$

On a :

$$f(x) - y = \frac{x^3 - 4x - 2\ln x}{2x} - \left(\frac{x^2}{2} - 2\right) = -\frac{\ln x}{x}$$

D'où le tableau de signe suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-y$	||	+	−

- Pour $x \in]0;1[$, (C) est au dessus de (P)
- Pour $x \in]1;+\infty[$, (C) est en dessous de (P)

b) Calcul de la limite en $+\infty$ de $[f(x)-y]$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0.$$

On peut conclure que les courbes (C) et (P) sont asymptotiques au voisinage de $+\infty$

6) Désignons par (C_1) l'ensemble des points de (C) d'abscisses supérieures à 2

a) Démontrons qu'il existe un point d'intersection d'abscisse x_0 de (C_1) avec l'axe des abscisses.

Si ce point existe, il répond à la condition $f(x_0)=0$

D'après le tableau de variation, f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$. Comme $]2;+\infty[$ est une partie de $]1;+\infty[$ alors f est strictement croissante sur $]2;+\infty[$. De plus,

$$f(2) = \frac{2^3-4\times 2-2\ln 2}{2\times 2} = -\frac{\ln 2}{2} \approx -0{,}35 \Longrightarrow f(2)<0 \;\; et \;\; \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Donc il existe un unique $x_0 \in]2;+\infty[$, $f(x_0)=0$. Ce point a pour coordonnées $(x_0;0)$

Montrons que $x_0 \in [2;3]$.

On a :

$$[2;3] \subset]1;+\infty[\;;\; f(3) = \frac{(3^3-4\times 3-2\ln 3)}{2\times 3} = \frac{5}{2}-\frac{\ln 3}{3} \approx 2{,}13>0 \quad et\, f(2)\approx -0{,}35<0$$

Donc $x_0 \in [2;3]$

b) Déterminons la pente de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 2

La pente de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 2 est :

$$f'(2) = \frac{2^3-1+\ln 2}{2^2} = \frac{7+\ln 2}{4}$$

7) Traçage de (P) et (C) dans un même repère. (Voir page suivante)

8) Soit $\alpha > 2$

a) Calculons en fonction de α l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan délimitée par les courbes (P) ; (C) et les droites d'équations $x=2$ et $x=\alpha$

On a :

$$\int_2^{\alpha}[f(x)-y]dx = -\int_2^{\alpha}\frac{\ln x}{x}dx$$

Posons : $u=\ln x$ et $v=\ln x$ on a : $u'=\frac{1}{x}$ et $v'=\frac{1}{x}$ d'où

$$(uv)' = u'v + v'u \Rightarrow (\ln^2 x)' = \frac{2\ln x}{x} \Rightarrow \frac{1}{2}(\ln^2 x)' = \frac{\ln x}{x}.$$

On en déduit que

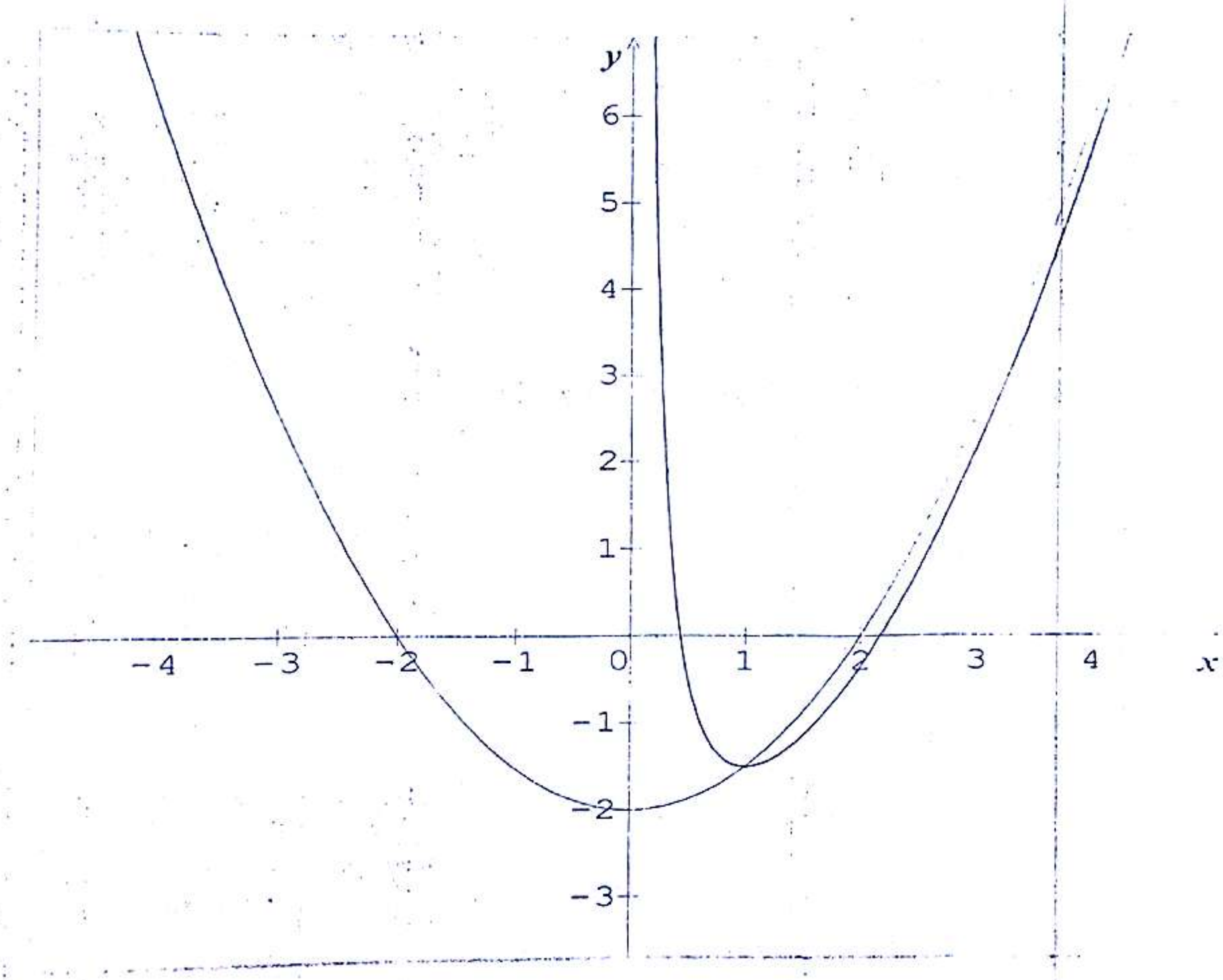
$$\int_2^{\alpha} [f(x) - y]dx = -\frac{1}{2}[\ln^2 x]_2^{\alpha} = -\frac{1}{2}\ln^2 \alpha + \frac{1}{2}\ln^2 2$$

Par ailleurs, l'unité d'aire est $4cm^2$ et, pour $\alpha > 2$, (C) est en dessous de (P) d'où :

$$A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}\ln^2 \alpha - \frac{1}{2}\ln^2 2\right) \times 4cm^2 = 2\left(\ln^2 \alpha - \ln^2 2\right)cm^2$$

b) Calcul de la limite d'aire.

$$\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha) = \lim_{\alpha \to +\infty} 2\left(\ln^2 \alpha - \ln^2 2\right) = \lim_{\alpha \to +\infty} 2\ln^2 \alpha = +\infty$$



Baccalauréat de l'enseignement du second degré   Session de juin 2013

Épreuve de mathématiques   série D   Durée 04 h coefficient 4

Exercice 1 : Pour chacune des questions suivantes trois réponses sont proposées, une seule de ces réponses convient. Sur votre copie, noter le numéro de la question et recopier la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une seule réponse est acceptée.

Rappel de notations : $P(A)$ désigne la probabilité de A, $P_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B, $P(A \cup B)$ signifie la probabilité de « A ou B » et $P(A \cap B)$ signifie probabilité de « A et B ».

1) On lance un dé cubique équilibré. Les faces sont numéroté de 1 à 6. La probabilité d'obtenir une face numérotée par un multiple de 3 est : $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$
2) Soient A et B deux évènements tels que $P(A) = 0{,}2$; $P(B) = 0{,}3$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$. Alors $P(A \cup B) = 0{,}4$; $P(A \cup B) = 0{,}5$; $P(A \cup B) = 0{,}6$
3) Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles, alors on a obligatoirement :

$$P(A \cap B) = 0 \quad ; \quad P_A(B) = P_B(A) \quad ; \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Exercice 2 : On désigne par α le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$

1) Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $u = 4(\sqrt{3} + \alpha)$
2) Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 solutions de l'équation $z^2 = u$
   a) En utilisant les formes trigonométriques de u et z
   b) En utilisant les formes algébriques de u et z. On pourra remarquer que

$$4 - 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 \quad et \quad 4 + 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3} + 1\right)^2$$

Exercice 3 : On considère la suite des nombres réels (u_n) pour tout entier naturel n définie par $u_0 = \frac{2}{3}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{n}{6} + \frac{1}{3}$.

1) Calculer u_1 et u_2
2) Soit la suite (v_n) pour tout entier naturel n définie par : $v_n = 2u_n - \frac{2n}{3}$
   a) calculer v_0; v_1 et v_2.
   b) Montrer la suite (v_n) est une suite géométrique dont-on précisera la raison.
3) Calculer en fonction de n, v_n puis u_n
4) Étudier la convergence de la suite (u_n)

Problème :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2(1 - \ln x)$

A- Étude de la fonction g
1) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en 0
2) Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$
3) En utilisant les résultats précédents, étudier le signe de la fonction g sur $]0; +\infty[$.

B- Représentation graphique et aire sous la courbe.
Soit $(\mathcal{C})$ la représentation graphique de g
1) Tracer $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormé ayant pour unité graphique 5cm
2) Déterminer une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1. La tracer sur le graphique
3) Calculer l'aire en unité d'aire du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

Correction BAC D 2013

Exercice 1 :

1) La bonne réponse est $\frac{1}{3}$
2) La bonne réponse est $P(A \cup B) = 0,4$
3) La bonne réponse est $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Exercice 2 :

Désignons par α le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On a $\alpha = i$

1) Déterminons le module et l'argument du nombre complexe $u = 4(\sqrt{3} + \alpha)$

On a :

$$|u| = 4\sqrt{3+1} = 8$$

Soit θ un argument de u on a $\cos\theta = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$ et $\sin\theta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$. De plus $\frac{\pi}{6} \in]-\pi;\pi]$ .D'où l'argument de u est $\theta = \frac{\pi}{6}$

2) Déterminons les nombres complexes z_1 et z_2 solutions de l'équation $z^2 = u$
   a) En utilisant les formes trigonométriques de u et z

Posons $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ et $u = 8\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. On a :

$$z^2 = u \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2\sqrt{2} \\ 2\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2\sqrt{2} \\ \varphi = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Pour $k = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{12}$ et $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

Pour $k = -1$; $\varphi = \frac{\pi}{12} - \pi = \frac{-11\pi}{12}$ et $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{-11\pi}{12} + i\sin\frac{-11\pi}{12}\right)$

   b) En utilisant les formes algébriques de u et z.

Posons $z = x + iy$

$$z^2 = u \Leftrightarrow (x+iy)^2 = 4(\sqrt{3} + i) \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 4\sqrt{3} + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 4\sqrt{3} \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 4\sqrt{3} & (1) \\ y = \frac{2}{x} & (2) \end{cases}$$

En remplaçant y par $\frac{2}{x}$ dans (1), on obtient :

$$x^2 - \frac{4}{x^2} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow x^4 - 4\sqrt{3}x^2 - 4 = 0 \quad (3)$$

En posant $X = x^2$, (3) devient

$$X^2 - 4\sqrt{3}X - 4 = 0$$

$$\Delta = (-4\sqrt{3})^2 + 16 = 64 = 8^2$$

D'où $X_1 = \frac{4\sqrt{3}-8}{2} < 0$ et $X_2 = \frac{4\sqrt{3}+8}{2} = 4 + 2\sqrt{3}$

- Pour X_1 , x n'existe pas car $X_1 < 0$
- Pour X_2 , $x_1 = (\sqrt{3}+1)$ ou $x_2 = -(\sqrt{3}+1)$
  - Pour $x_1 = (\sqrt{3}+1)$; $y_1 = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{2} = \sqrt{3}-1$ et
    $z_1 = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)$
  - Pour $x_2 = -(\sqrt{3}+1)$; $y_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}+1} = -\frac{2(\sqrt{3}-1)}{2} = -\sqrt{3}+1$ et
    $z_2 = (-\sqrt{3}-1) + i(-\sqrt{3}+1)$

Exercice 3 :

Considérons la suite des nombres réels (u_n) pour tout entier naturel n définie par $u_0 = \frac{2}{3}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{n}{6} + \frac{1}{3}$.

1) Calcul de u_1 et u_2

$$u_1 = \frac{u_0}{2} + \frac{0}{6} + \frac{1}{3} = \frac{\frac{2}{3}}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \;;\quad u_2 = \frac{\frac{2}{3}}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

2) Soit la suite (v_n) pour tout entier naturel n définie par : $v_n = 2u_n - \frac{2n}{3}$

a) Calculons v_0; v_1 et v_2 .

$$v_0 = 2u_0 - \frac{2\times 0}{3} = \frac{4}{3};\quad v_1 = 2\times\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3};\quad v_2 = 2\times\frac{5}{6} - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

b) Montrons que la suite (v_n) est une suite géométrique et précisons sa raison.

Soit $n \in N$ on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2u_{n+1} - \frac{2(n+1)}{3}}{2u_n - \frac{2n}{3}} = \frac{2\left(\frac{u_n}{2} + \frac{n}{6} + \frac{1}{3}\right) - \frac{2(n+1)}{3}}{2u_n - \frac{2n}{3}} = \frac{u_n - \frac{n}{3}}{2\left(u_n - \frac{n}{3}\right)} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{4}{3}$

3) Calculons en fonction de n, v_n puis u_n

De ce qui précède, on en déduit que :

$$v_n = v_0 q^n = \frac{4}{3}\times\frac{1}{2^n} = \frac{1}{3}\times 2^{2-n}$$

Et,

$$v_n = 2u_n - \frac{2n}{3} \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n + \frac{2n}{3}}{2} = \frac{1}{2}v_n + \frac{n}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}.2^{2-n}\right) + \frac{n}{3} = \frac{1}{3}.2^{1-n} + \frac{n}{3}$$
$$= \frac{1}{3\times 2^{n-1}} + \frac{n}{3}$$

4) Étude de la convergence de la suite (u_n)

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3\times 2^{n-1}}+\frac{n}{3}\right) = +\infty$$

Car

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3\times 2^{n-1}} = 0 \quad et \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3}\right) = +\infty$$

On en déduit que la suite (u_n) est divergente.

Problème :

Considérons la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2(1-\ln x)$

A- Étude de la fonction g

1) Déterminons les limites de g en $+\infty$ et en 0

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2(1-\ln x) = -\infty$$

Car

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty}(1-\ln x) = -\infty$$

Et :

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} x^2(1-\ln x) = \lim_{x\to0^+} x^2\left(1+\ln\frac{1}{x}\right)$$

En posant $X = \frac{1}{x}$, on obtient :

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{X\to+\infty}\left(\frac{1+\ln X}{X^2}\right) = \lim_{X\to+\infty}\left(\frac{\ln X}{X^2}\right) = 0$$

2) Etudions les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$

g est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions continues et dérivables sur $]0;+\infty[$ Et quelque soit $x \in]0;+\infty[$,

$$g'(x) = 2x(1-\ln x) - \frac{1}{x}\times x^2 = x - 2x\ln x = x(1-2\ln x).$$

D'où

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x = 1 \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{e} \quad car \quad x > 0$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	$-$

Ainsi :

- Pour $x \in]0;\sqrt{e}[$, g est strictement croissante.
- pour $x \in]\sqrt{e};+\infty[$, g est strictement décroissante

3) En utilisant les résultats précédents, étudions le signe de la fonction g sur $]0;+\infty[$

Pour $g \in]0;\sqrt{e}[$, g est strictement croissante. Donc l'image de l'intervalle $]0;\sqrt{e}[$ par g est:

$$]\lim_{x\to 0^+} g(x); g(\sqrt{e})[=]0;\frac{e}{2}[\Rightarrow g(x) > 0$$

Pour $g \in]\sqrt{e};+\infty[$, g est strictement décroissante. Donc l'image par g de l'intervalle $]\sqrt{e};-\infty[$ est :

$$]\lim_{x\to +\infty} g(x); g(\sqrt{e})[=]-\infty;\frac{e}{2}[.$$

Comme $\frac{e}{2} > 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]\sqrt{e};+\infty[$. Par ailleurs,

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(1-\ln x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ ou \ x = e$$

D'où le tableau de signe de $g(x)$ suivant :

x	0	e	$+\infty$
$g(x)$	$+$		$-$

B- Représentation graphique et aire sous la courbe.
Soit (C) la représentation graphique de g

1) Tracer (C) dans un repère orthonormé ayant pour unité graphique $5cm$. (Voir page suivante)
2) Déterminons une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.

L'équation de la tangente au pont d'abscisse 1 est :

$$y = (g'(1))(x-1) + g(1) = 1(x-1) + 1 = x : \qquad y = x$$

La tracer sur le graphique

3) Calculons l'aire en unité d'aire du domaine délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

On a :

$$\int_1^e g(x)dx = \int_1^e (x^2 - x^2\ln x)dx = \int_1^e x^2dx - \int_1^e x^2\ln x\,.\,dx = [\frac{1}{3}x^3]_1^e - \int_1^e x^2\ln x\,.\,dx$$

Posons : $u = \ln x$ et $v = \frac{1}{3}x^3$ on a : $u' = \frac{1}{x}$ et $v' = x^2$. D'où

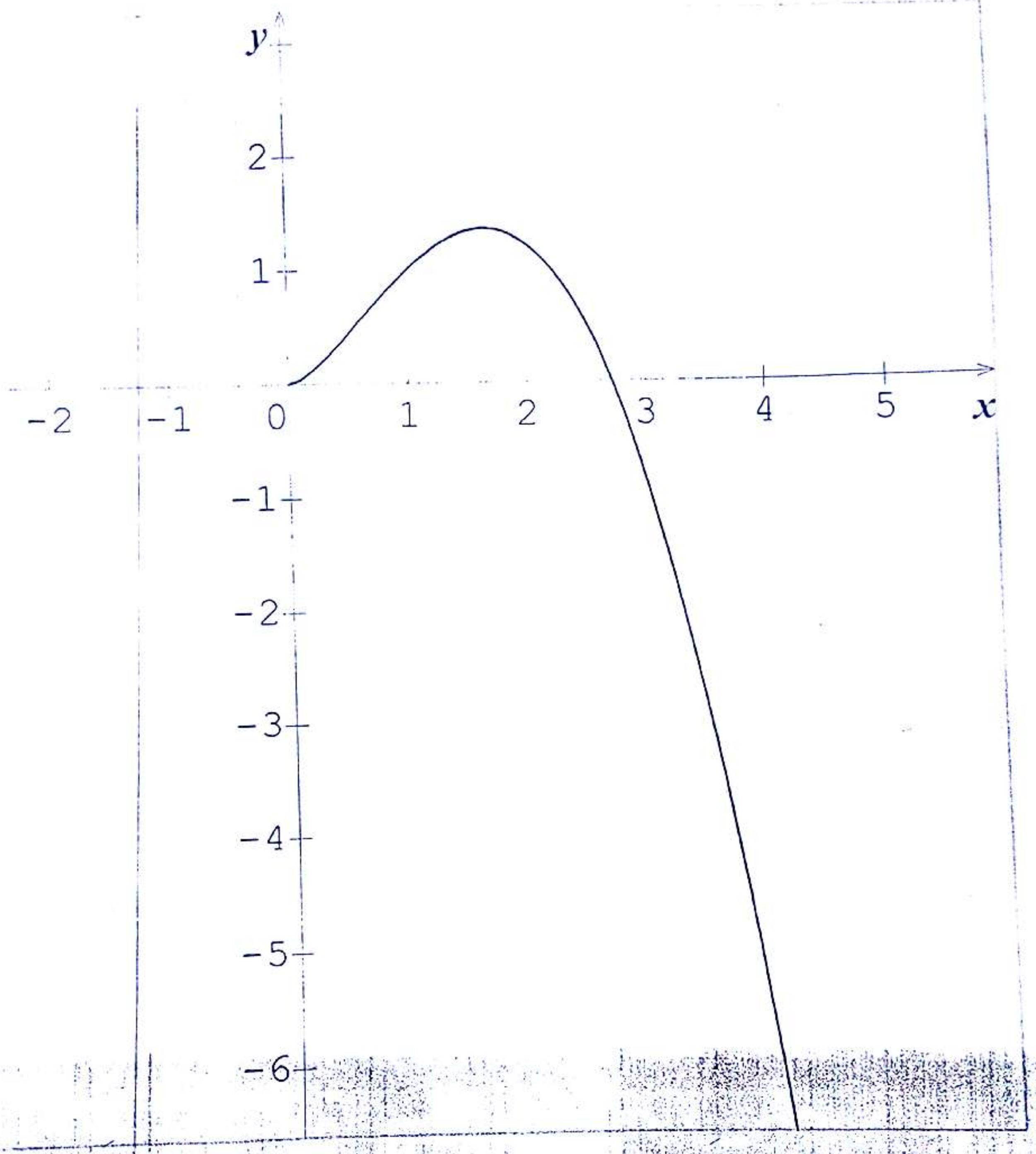
$$(uv)' = u'v + v'u \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}x^3\ln x\right)' = \frac{1}{3}x^2 + x^2\ln x \Leftrightarrow x^2\ln x = \left(\frac{1}{3}x^3\ln x\right)' - \left(\frac{1}{9}x^3\right)'$$
$$= \left(\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3\right)'$$

Ainsi :

$$\int_1^e g(x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^3\ln x\right]_1^e = \frac{1}{3}\left[x^3\left(\frac{4}{3} - \ln x\right)\right]_1^e = \frac{e^3 - 4}{9}$$

L'unité d'aire étant $5cm \times 5cm = 25cm^2$, l'aire cherchée est :

$$A = \frac{25(e^3 - 4e)}{9} cm^2 \approx 1{,}024 cm^2$$



Lycée Etoile Polaire

Baccalauréat de l'enseignement du second degré Session de juin 2014

Épreuve de mathématiques série D Durée 04 h coefficient 4

Exercice 1 :

Un sac contient 8 boules indiscernables au touché, dont 5 rouges et 03 noirs.

On tire au hasard une boule du sac et on note sa couleur, on la remet dans le sac et on tire au hasard une seconde boule et on note sa couleur.

Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A- « les deux boules tirées sont de couleurs différentes »
B- « les deux boules tirées sont de même couleur ».

Exercice 2 :

On considère les nombres $z_1 = (\sqrt{3}+1)(1+i)$; $z_2 = (\sqrt{3}-1)(-1+i)$

1) Calculer les modules et les arguments des nombres complexes z_1 et z_2.
2) On pose $u = z_1 z_2$ et $v = \frac{z_1}{z_2}$. Déterminer les modules et les arguments des nombres complexes u et v
3) On pose $w = z_1 + z_2$ et $t = z_1 - z_2$. Déterminer les modules et les arguments des nombres complexes w et t
4) **En déduire le module et l'argument du nombre complexe $x = z_1^2 - z_1^2$**

Exercice 3 :

1) A) soit l'application de $]1;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$.
Trouver une primitive de F de f.
B) Soit g l'application de $]1;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$. Trouver trois constantes réels $a; b$ et c telles que pour tout x de l'intervalle $]1;+\infty[$, on ait
$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$
Trouver une primitive G de g.

2) A) Soit α un nombre réel supérieur à 2. En utilisant les résultats obtenus précédemment calculer :
$$I(\alpha) = \int_2^{\alpha} \frac{2x}{(x^2-1)^2}dx \ .$$
B) Déterminer la limite lorsque α tend vers $+\infty$ de $I(\alpha)$. Calculer sa valeur approchée.

Problème

A- Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2) Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

B- Soit la fonction $G: x \to \frac{x^3}{x^2-x-2}$

1- Définir son domaine de définition ; sa dérivée et son sens de variations.
2- Faire une étude aux bornes de son domaine de définition.
3- Tracer sa courbe représentative.

Correction BAC D 2014

Exercice 1 :

Un sac contient 8 boules indiscernables au touché, dont 5 rouges et 03 noirs.

On fait un tirage successif avec remise de deux boules. Soit Ω l'univers associé à cet évènement On a :

$$Card(\Omega) = 8^2 = 64$$

Calculons la probabilité de chacun des évènements suivants :

A- Soit A l'évènement : « tirer deux boules de couleurs différentes »

On a : $Card(A) = 2 \times 5^1 \times 3^1 = 30$ d'où la probabilité de A est $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{30}{64} = \frac{15}{32}$

B- Soit B l'évènement : « tirer deux boules de même couleur »

On a : $Card(B) = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$ d'où la probabilité de B est $P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{34}{64} = \frac{17}{32}$

Exercice 2 :

Considérons les nombres complexes $z_1 = (\sqrt{3}+1)(1+i)$; $z_2 = (\sqrt{3}-1)(-1+i)$

1) Calcul des modules de z_1 et z_2.

On a :

$$|z_1| = |(\sqrt{3}+1)(1+i)| = (\sqrt{3}+1)|(1+i)| = (\sqrt{3}+1)\sqrt{1+1} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$$

Et :

$$|z_2| = |(\sqrt{3}-1)(-1+i)| = (\sqrt{3}-1)|(-1+i)| = (\sqrt{3}-1)\sqrt{1+1} = \sqrt{6}-\sqrt{2}$$

Recherche des arguments des nombres complexes z_1 et z_2.

Soit θ_1 un argument de z_1. On a : $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Donc

$$\theta_1 = \arg(\sqrt{3}+1) + \arg(1+i) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Car $(\sqrt{3}+1) \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \arg(\sqrt{3}+1) = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi l'argument de z_1 est $\frac{\pi}{4}$

Soit θ_2 un argument de z_2. On a : $-1 + i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. Donc

$$\theta_2 = \arg(\sqrt{3}-1) + \arg(-1+i) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Car $(\sqrt{3}-1) \in \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \arg(\sqrt{3}-1) = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Ainsi l'argument de z_2 est $\frac{3\pi}{4}$

2) On pose $u = z_1 z_2$ et $v = \frac{z_1}{z_2}$. Déterminons les modules et les arguments des nombres complexes u et v

Les modules : $|u| = |z_1||z_2| = (\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 4$ et $|v| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = 2+\sqrt{3}$

Les arguments :

$$\arg(u) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

D'où l'argument de u est π

$$\arg(v) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} = \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

D'où l'argument de v est $-\frac{\pi}{2}$

3) On pose $w = z_1 + z_2$ et $t = z_1 - z_2$. Déterminons les modules et les arguments des nombres complexes w et t

On a :

$$w = z_1 + z_2 = (\sqrt{3}+1)(1+i) + (\sqrt{3}-1)(-1+i) = 2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

D'où : $|w| = 4$ et l'argument de w est $\frac{\pi}{3}$

Et :

$$t = z_1 - z_2 = (\sqrt{3}+1)(1+i) - (\sqrt{3}-1)(-1+i) = 2\sqrt{3} + 2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$$
$$= 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

D'où : $|t| = 4$ et l'argument de t est $\frac{\pi}{6}$

Déduisons-en le module et l'argument du nombre complexe $x = z_1^2 - z_1^2$.

On a :

$$x = z_1^2 - z_1^2 = (z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = wt$$

D'où

$$|x| = |w||t| = 4 \times 4 = 16$$

Et

$$\arg(x) = \arg(w) + \arg(t) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

L'argument de x est $\frac{\pi}{2}$

<u>Exercice 3 :</u>

1) A) Soit l'application de $]1;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$.
Trouvons une primitive de F de f.

Posons : $v = x^2 - 1$ on a $v' = 2x$ et $f(x) = \frac{v'}{v^2}$. En prenant $F(x) = -\frac{1}{v}$, on a $F'(x) = \frac{v'}{v^2}$

Donc une primitive de f est F de $]1;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par $F(x) = -\frac{1}{x^2-1}$

B) Soit g l'application de $]1;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$.

Déterminons les constantes réelles a ; b et c telles que pour tout x de l'intervalle $]1;+\infty[$, on ait

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$

On a :

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{a(x^2-1) + b(x^2-x) + c(x^2+x)}{x(x^2-1)} \Leftrightarrow \frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{(a+b+c)x^2 + (c-b)x - a}{x(x^2-1)}$$

En identifiant les coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ c-b=0 \\ -a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=1 \\ b=c \\ a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Trouvons une primitive G de g.

On a :

$$g(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}$$

On en déduit qu'une primitive de g sur $]1;+\infty[$ est :

$$G(x) = -\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) = -\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2-1) = -\ln x + \ln\sqrt{x^2-1}$$
$$= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$$

2) A) Soit α un nombre réel supérieur à 2. Calculons :

$$I(\alpha) = \int_2^\alpha \frac{2x}{(x^2-1)^2}\,dx .$$

D'après la question 1-A, $F(x) = -\frac{1}{x^2-1}$ est une primitive de $\frac{2x}{(x^2-1)^2}$ sur $]1;+\infty[$. D'où

$$I(\alpha) = \int_2^\alpha \frac{2x}{(x^2-1)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x^2-1}\right]_2^\alpha = -\frac{1}{\alpha^2-1} + \frac{1}{2^2-1} = \frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{1}{3}$$

B) Déterminons la limite lorsque α tend vers $+\infty$ de $I(\alpha)$.

$$\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha) = \lim_{\alpha\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \quad car \lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha^2} = 0$$

Sa valeur approchée à l'ordre 3 est $I(\alpha) \approx 0{,}333$.

Problème

A- Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) Étude de la continuité et la dérivabilité de f en 0.

- Continuité :

Posons $X = \frac{1}{x}$. On a :

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{X\to -\infty}\left(\frac{1}{2X}e^X\right) = \lim_{X\to -\infty}\left(\frac{e^X}{2X}\right) = 0 \quad car \ \lim_{X\to -\infty} e^X = 0 \ \ et \ \lim_{X\to -\infty}\left(\frac{1}{2X}\right) = 0$$

Et :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{X\to +\infty}\left(\frac{1}{2X}e^X\right) = \lim_{X\to -\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{e^X}{X}\right) = +\infty \quad car \ \lim_{X\to +\infty}\left(\frac{e^X}{X}\right) = +\infty$$

On en déduit que f n'est pas continue en 0 car

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

Par ailleurs f est continue à gauche de 0 car

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

- Dérivabilité :

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}}}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}} = \lim_{X\to -\infty}\left(\frac{1}{2}e^X\right) = 0$$

Et

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}}}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}} = \lim_{X\to +\infty}\left(\frac{1}{2}e^X\right) = +\infty$$

On en déduit que f n'est pas dérivable en 0 car

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) \neq \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)$$

Par ailleurs f est dérivable à gauche de 0 et son nombre dérivé à gauche de 0 est 0

2) Étude des variations de f

- Dérivée et signe de la dérivée :

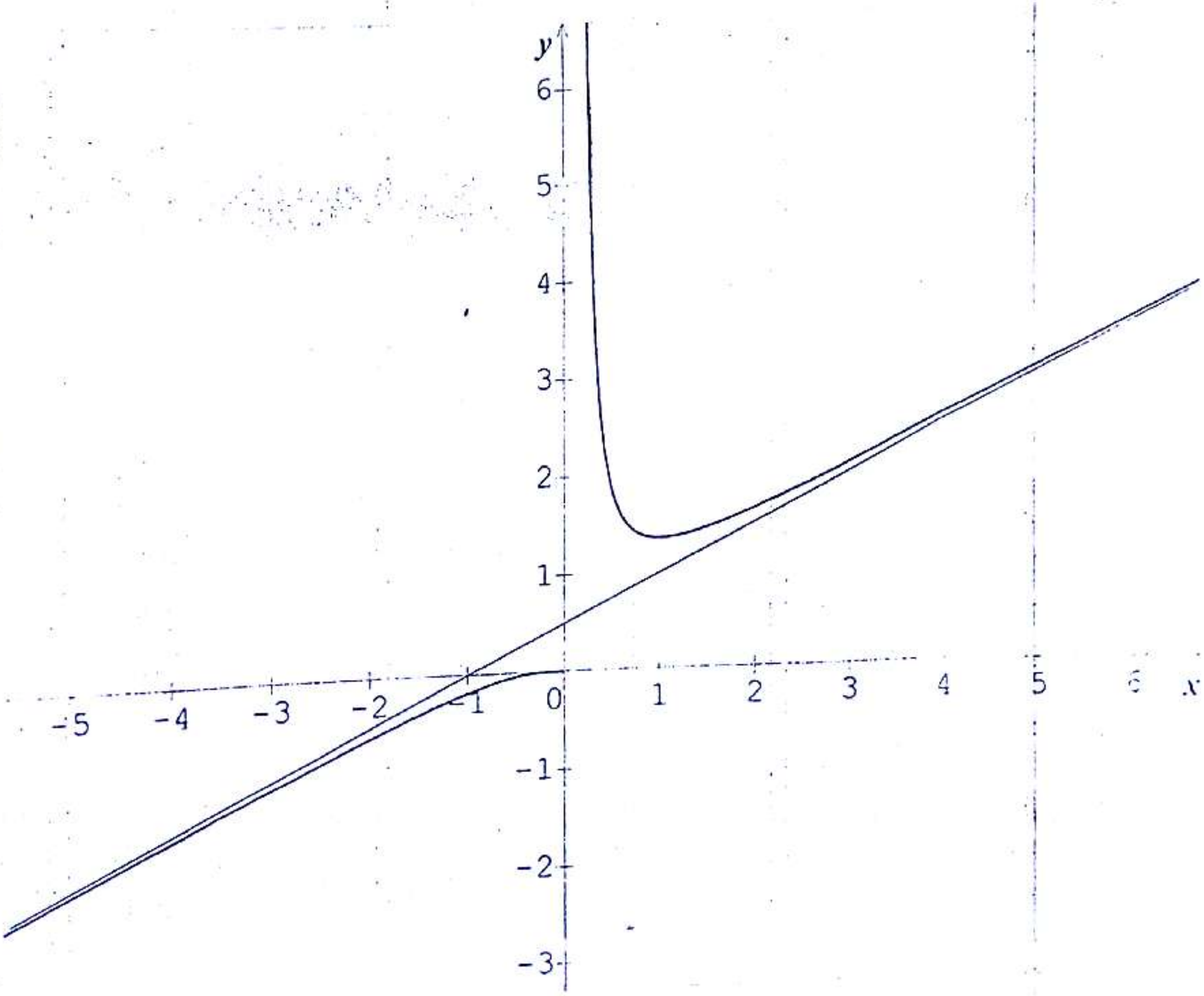
f est continue et dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ comme produit de fonctions continues et dérivables sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$. Et pour tout $x \in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$,

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}xe^{\frac{1}{x}}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{x}} + x\left(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\right)\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $\frac{x-1}{x}$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	|	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0 ‖ $+\infty$	↘	$\frac{e}{2}$	↗	$+\infty$

Pour le traçage de cette courbe, on remarquera que la droite $(\Delta): y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ est asymptote oblique.



B- Soit la fonction $G: x \to \frac{x^3}{x^2-x-2}$

1- Domaine de définition de G

$G(x)$ existe si et seulement si $x^2 - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ et $x \neq -1$

D'où le domaine de définition de G et $]-\infty;-1[\cup]-1;2[\cup]2;+\infty[$

Sa dérivée

G est continue et dérivable sur son domaine de définition comme quotient de fonctions continues et dérivables sur ce domaine. Et, pour tout $x \in]-\infty;-1[\cup]-1;2[\cup]2;+\infty[$,

$$G'(x) = \frac{3x^2(x^2-x-2)-(2x-1)x^3}{(x^2-x-2)^2} = \frac{x^2(x^2-2x-6)}{(x^2-x-2)^2}$$

Le signe de $G'(x)$ est celui de x^2-2x-6 car pour tout $x \in D_G$, $\frac{x^2}{(x^2-x-2)^2} \geq 0$

Pour $(x^2-2x-6)=0$, $\Delta = 4+24 = \left(2\sqrt{7}\right)^2$ d'où

$x_1 = \frac{2-2\sqrt{7}}{2} = 1-\sqrt{7}$ et $x_2 = \frac{2+\sqrt{7}}{2} = 1+\sqrt{7}$

Les variations de G sont consignés dans le tableau de variation après la question suivante.

2- Étude aux bornes du domaine de définition de G .

$$\lim_{x\to-\infty} G(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} G(x) = \lim_{x\to-1^-}\left(\frac{x^3}{(x+1)(x-2)}\right) = \lim_{x\to-1^-}\left(-\frac{1}{-3(x+1)}\right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} G(x) = \lim_{x\to-1^+}\left(\frac{x^3}{(x+1)(x-2)}\right) = \lim_{x\to-1^+}\left(-\frac{1}{-3(x+1)}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} G(x) = \lim_{x\to2^-}\left(\frac{x^3}{(x+1)(x-2)}\right) = \lim_{x\to2^-}\left(\frac{8}{3(x-2)}\right) = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} G(x) = \lim_{x\to2^+}\left(\frac{x^3}{(x+1)(x-2)}\right) = \lim_{x\to2^+}\left(\frac{8}{3(x-2)}\right) = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

Par ailleurs,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{G(x)}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{G(x)}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{x^3}{x^2}}{x}\right) = 1$$

D'où la droite d'équation $y = x + b$ est asymptote oblique à (C_G) où

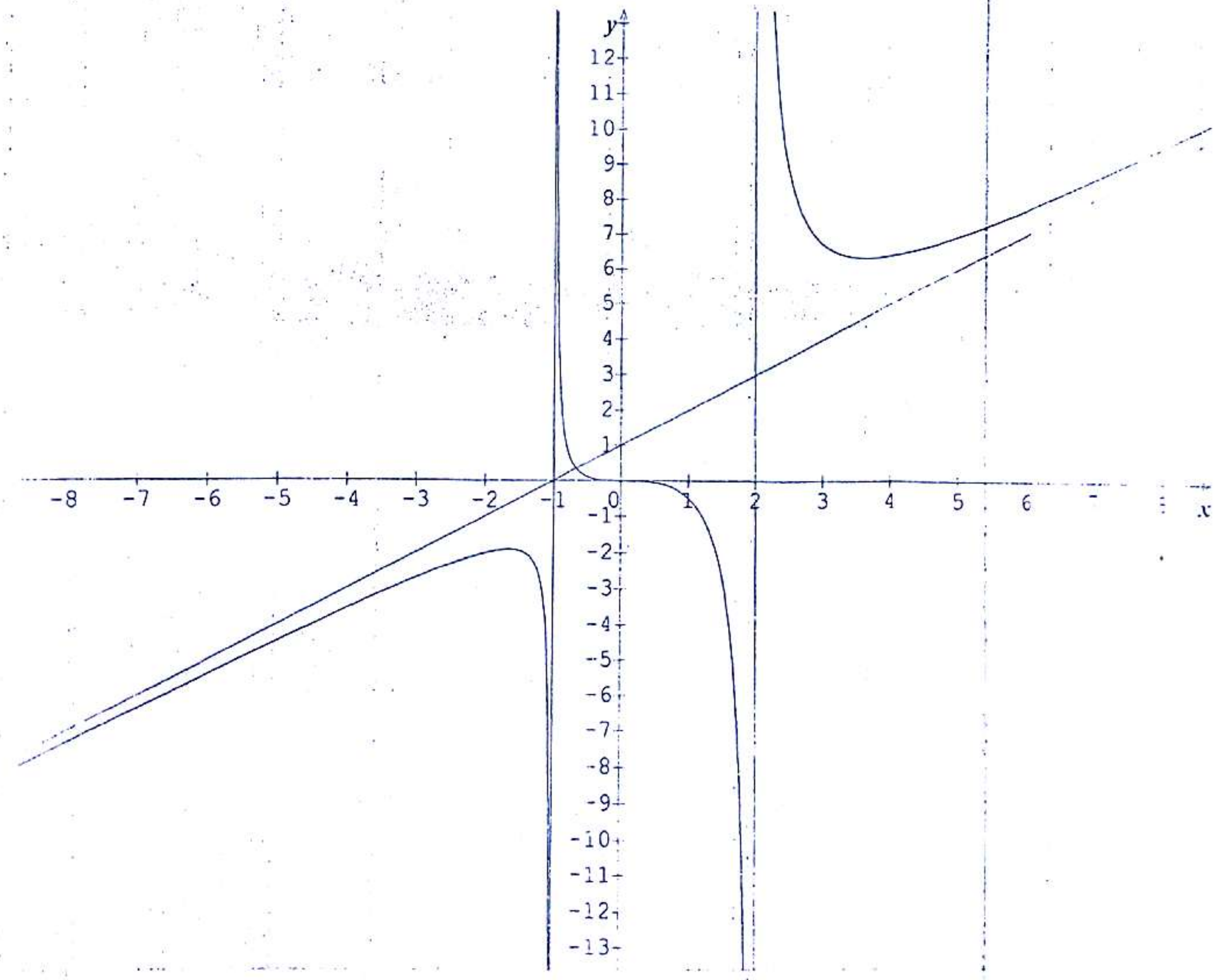
$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(G(x)-x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-x(x^2-x-2)}{x^2-x-2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2-x-2}\right) = 1$$

Donc la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_G)$

Tableau de variations :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{7}$		-1		0		2		$1+\sqrt{7}$		$+\infty$
$G'(x)$		$+$		$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$		$+$	
$G(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{20-14\sqrt{7}}{9}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘		↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{20+14\sqrt{7}}{9}$	↗	$+\infty$

3- Courbe représentative de G .



Baccalauréat de l'enseignement du second degré Session de juin 2015

Épreuve de mathématiques série D Durée 04 h coefficient 4

Exercice 1 : Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - 2(1+2i)z^2 + 7iz + 3(1-3i)$

1. Démontrer qu'il existe une imaginaire pure $z_1 = i\beta$ solution de l'équation $P(z) = 0$.
2. Déterminer le polynôme Q tel que $Q(z) = (z - z_1)Q(z)$
3. Résoudre dans C l'équation $P(z) = 0$

Exercice 2 : une caisse contient 10 cubes bleus, 22 cubes jaunes et 4 cubes rouges, tous de même taille.

1. Quelle est la probabilité de pouvoir constituer le drapeau du Tchad :
   a. En prenant simultanément 3 cubes ?
   b. En prenant simultanément 4 cubes ?
2. Quelle est la probabilité, en prenant successivement 3 cubes l'un après l'autre sans remise, d'obtenir dans l'ordre le drapeau du Tchad ?
3. Quelle est la probabilité, en prenant successivement 3 cubes l'un après l'autre avec remise, d'obtenir dans l'ordre le drapeau du Tchad ?

Problème :

Partie A : Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 2 + \frac{3}{x^3} - 6\frac{\ln x}{x^3}$

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$
2. Étudier les variations de g ; dresser son tableau de variation et en déduire que pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$.

Partie B : Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x + \frac{3\ln x}{x^2}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité sur les axes $1cm$)

1.
   a. Calculer la dérivée de f et préciser son sens variation (on remarquera que la dérivée première de f donne g)
   b. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$
   c. En déduire le tableau de variation de f
2.
   a. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe de f et préciser sa position par rapport à cette courbe.
   b. Préciser les ordonnées des points d'abscisses 0,5 ; 1 ; 2 ; et 3.
   c. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique racine $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
3. Tracer (C)
4. Calculer l'aire du domaine plan compris entre la droite (D), la courbe (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

18

Correction BAC D 2015

Exercice 1 :

Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 - 2(1+2i)z^2 + 7iz + 3(1-3i)$

1. Démontrons qu'il existe une imaginaire pure $z_1 = i\beta$ solution de l'équation $P(z) = 0$.

Soit $z_1 = i\beta$ $\beta \in \mathbb{R}^*$ un nombre imaginaire pur. On a :

$$P(z_1) = (i\beta)^3 - 2(1+2i)(i\beta)^2 + 7i(i\beta) + 3(1-3i) = -i\beta^3 + 2(1+2i)\beta^2 - 7\beta + 3 - 9i$$
$$= (2\beta^2 - 7\beta + 3) + (-\beta^3 + 4\beta^2 - 9)i$$

Pour que $z_1 = i\beta$ soit solution de l'équation $P(z) = 0$ il faut que :

$$\begin{cases} 2\beta^2 - 7\beta + 3 = 0 & (1) \\ -\beta^3 + 4\beta^2 - 9 = 0 & (2) \end{cases}$$

Pour (1), $\Delta = 49 - 24 = 5^2 \Rightarrow \beta_1 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$ et $\beta_2 = \frac{7+5}{4} = 3$

En remplaçant β_1 par sa valeur dans (2), on obtient : $-\frac{1}{8} + 1 - 9 = 0$ ce qui est erroné.

En remplaçant β_2 par sa valeur dans (2), on obtient : $-27 + 36 - 9 = 0$ ce qui est juste.

Ainsi $z_1 = 3i$ est la solution imaginaire pure de l'équation $P(z) = 0$

2. Déterminons le polynôme Q tel que $P(z) = (z - 3i)Q(z)$

Posons $Q(z) = az^2 + bz + c$ où a ; b et c sont des nombres complexes. On a :

$$(z - 3i)Q(z) = (z - 3i)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b - 3ai)z^2 + (c - 3bi)z - 3ic$$

En identifiant les coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3ai = -2(1+2i) \\ c - 3bi = 7i \\ -3ic = 3(1-3i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 - i \\ c = 3 + i \end{cases}$$

D'où $Q(z) = z^2 + (-2-i)z + 3 + i$

3. Résolvons dans C l'équation $P(z) = 0$. On a :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 3i \quad ou \quad Q(z) = 0$$

Pour $Q(z) = 0$, $\Delta = (-2-i)^2 - 4(3+i) = -9 = (3i)^2$

Donc les racines carrées de Δ sont $\delta_1 = -3i$; et $\delta_2 = 3i$. D'où les solutions de $Q(z) = 0$ suivantes :

$$k_1 = \frac{2 + i - 3i}{2} = 1 - i \quad et \quad k_2 = \frac{2 + i + 3i}{2} = 1 + 2i$$

Soit S l'ensemble solution de l'équation $P(z) = 0$

$$S = \{3i;\ 1 - i;\ 1 + 2i\}$$

Exercice 2 :

Une caisse contient 10 cubes bleus, 22 cubes jaunes et 4 cubes rouges, tous de même taille.

1) Calcul de la probabilité de pouvoir constituer le drapeau du Tchad :
   a. En prenant simultanément 3 cubes

Soit Ω_1 l'univers associé au tirage simultané de trois cubes dans cette caisse et A l'évènement : « constituer le drapeau du Tchad à l'aide des boules tirées »

On a : $Card(\Omega_1) = C_{36}^3 = \frac{36!}{33!3!} = 7140$ et $Card(A) = C_{22}^1 C_{10}^1 C_4^1 = 880$. D'où

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega_1)} = \frac{880}{7140} = \frac{44}{357} \approx 0{,}1232$$

   b. En prenant simultanément 4 cubes

Soit Ω_2 l'univers associé au tirage simultané de quatre cubes dans cette caisse et B l'évènement : « constituer le drapeau du Tchad à l'aide des boules tirées »

On a : $Card(\Omega_2) = C_{36}^4 = \frac{36!}{32!4!} = 58905$ et $Card(B) = C_{22}^2 C_{10}^1 C_4^1 + C_{22}^1 C_{10}^2 C_4^1 + C_{22}^1 C_{10}^1 C_4^2 = 14520$. D'où

$$P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega_2)} = \frac{14520}{58905} = \frac{88}{357} \approx 0{,}2465$$

2) Soit Ω_3 l'univers associé au tirage successif sans remise de trois cubes dans cette caisse et C l'évènement « constituer dans l'ordre des couleurs le drapeau du Tchad à l'aide des boules tirées »

On a : $Card(\Omega_3) = A_{36}^3 = \frac{36!}{33!} = 42840$ et $Card(C) = A_{22}^1 A_{10}^1 A_4^1 = 880$. D'où

$$P(C) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega_3)} = \frac{880}{42840} = \frac{22}{1071} \approx 0{,}0205$$

3) Soit Ω_4 l'univers associé au tirage successif avec remise de trois cubes dans cette caisse et D l'évènement « constituer dans l'ordre des couleurs le drapeau du Tchad à l'aide des boules tirées »

On a : $Card(\Omega_4) = 36^3 = 46656$ et $Card(D) = 22 \times 10 \times 4 = 880$. D'où

$$P(D) = \frac{Card(D)}{Card(\Omega_4)} = \frac{880}{46656} = \frac{55}{2916} \approx 0{,}0189$$

Problème :

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 2 + \frac{3}{x^3} - 6\frac{\ln x}{x^3}$

1) Déterminons les limites de g en 0 et en $+\infty$

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(2+\frac{3}{x^3}-6\frac{\ln x}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^3}(2x^3+3-6\ln x)\right)$$

Or

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^3}\right) = +\infty \ ; \ \lim_{x\to 0^+} 2x^3 = 0 \ \ et \ \ \lim_{x\to 0^+}(-6\ln x) = +\infty$$

D'où

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(2+\frac{3}{x^3}-6\frac{\ln x}{x^3}\right) = 2$$

Car

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3}{x^3}\right) = 0 \ \ et \ \ \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x^3}\right) = 0$$

2) Étude des variations de g

g est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions continues et dérivables sur $]0;+\infty[$. Et quelque soit $x \in]0;+\infty[$,

$$g'(x) = \left(2+\frac{3}{x^3}-6\frac{\ln x}{x^3}\right)' = -\frac{9x^2}{x^6}-6\left(\frac{\frac{1}{x}x^3-3x^2\ln x}{x^6}\right) = -\frac{9}{x^4}+\frac{-6+18\ln x}{x^4}$$

$$= \frac{-15+18\ln x}{x^4}.$$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $(-15+18\ln x)$ car quelque soit $x \in]0;+\infty[$, $x^4>0$.

$$-15+18\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = e^{\frac{5}{6}}$$

D'où le tableau de signe de $g'(x)$ suivant :

x	0		$e^{\left(\frac{5}{6}\right)}$		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$-$		$+$	

- Pour $x \in]0; e^{\frac{6}{5}}[$, g est strictement décroissante.
- Pour $x \in]e^{\frac{5}{6}}; +\infty[$, g est strictement croissante.

Tableau de variation de g

x	0	$e^{\frac{5}{6}}$	$+\infty$
$g'(x)$	‖ $-$		$+$
$g(x)$	‖ $+\infty$ ↘	$2(1-e^{-\frac{5}{2}})$	↗ 2

Déduisons-en que pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$.

On a :

$$g\left(e^{\frac{5}{6}}\right) = 2 + \frac{3}{\left(e^{\frac{5}{6}}\right)^3} - 6\frac{\ln(e^{\frac{5}{6}})}{\left(e^{\frac{5}{6}}\right)^3} = 2 + \frac{3}{e^{\frac{5}{2}}} - 6\frac{\frac{5}{6}}{e^{\frac{5}{2}}} = 2 + \frac{3-5}{e^{\frac{5}{2}}} = \frac{2\left(e^{\frac{5}{2}}-1\right)}{e^{\frac{5}{2}}} = 2\left(1-e^{-\frac{5}{2}}\right)$$

Or $2\left(1-e^{-\frac{5}{2}}\right) > 0 \Rightarrow g\left(e^{\frac{5}{6}}\right) > 0$; et d'après le tableau de variation, pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$g(x) > g\left(e^{\frac{5}{6}}\right)$. D'où par transition de l'inégalité, $\forall x \in]0;+\infty[, g(x) > 0$.

Partie B :

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x + \frac{3\ln x}{x^2}$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité sur les axes $1cm$)

1.

a. Calculons la dérivée de f et précisons son sens de variation

f est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions continues et dérivables sur $]0;+\infty[$. Et, $\forall x \in]0;+\infty[$

$$f'(x) = \left(2x + \frac{3\ln x}{x^2}\right)' = 2 + \frac{3\left(\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln x\right)}{x^4} = 2 + \frac{3x - 6x\ln x}{x^4} = 2 + \frac{3}{x^3} - 6\frac{\ln x}{x^3} = g(x)$$

Donc f est strictement croissante car $f'(x) = g(x)$ et nous avons montré que

$$\forall x \in]0;+\infty[, g(x) > 0$$

b. Calcul des limites de f en 0 et en $+\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(2x + \frac{3}{x^2}\ln x\right)$$

Or

$$\lim_{x\to 0^+} 2x = 0 \ ; \ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3}{x^2}\right) = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

D'où

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x + \frac{3\ln x}{x^2}\right) = +\infty$$

Car

$$\lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right) = 0$$

c. Tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

2.

a. Démontrons que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe de f et précisons sa position par rapport à cette courbe.

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3\ln x}{x^2}\right) = 0$$

Donc (D): $y = 2x$ est asymptote oblique à (C). Par ailleurs,

$f(x) - y = \frac{3\ln x}{x^2}$ a le signe de $\ln x$. D'où :

- $\forall x \in]0;1[$, $f(x) - y < 0$ donc (D) est au dessus de (C)
- $\forall x \in]1;+\infty[$, $f(x) - y > 0$ donc (D) est en dessous de (C)

b. Précisons les ordonnées des points de (C) d'abscisses 0,5 ; 1 ; 2 ; et 3.

$$f(0;5) \approx -7{,}32 \;;\; f(1) = 2 \;;\; f(2) \approx 4{,}52 \;;\; f(3) \approx 6{,}37$$

c. Démontrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.

D'après le tableau des variations, f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Donc

$$\forall y_0 \in \mathbb{R}, \exists! x_0 \in]0;+\infty[\setminus f(x_0) = y_0.$$

Comme $0 \in \mathbb{R}$, $\exists! \alpha \in]0;+\infty[\setminus f(\alpha) = 0$. de plus on a trouvé que, $f(0{,}5) < 0$ et $f(1) > 0$

D'où d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\alpha \in \left[\frac{1}{2};1\right]$

3. Traçage de (C). (Voir page suivante)
4. Calcul d'aire du domaine plan compris entre la droite (D), la courbe (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Dans ce domaine, (D) est en dessous de (C) de plus l'unité d'aire est $1cm^2$. Soit A l'aire de ce domaine. On a :

$$A = \int_1^e (f(x) - y)dx \; .cm^2 = -3\int_1^e -\frac{\ln x}{x^2}dx \; .cm^2 = -3\int_1^e -\frac{1}{x^2}\ln(x)\,dx \; .cm^2$$

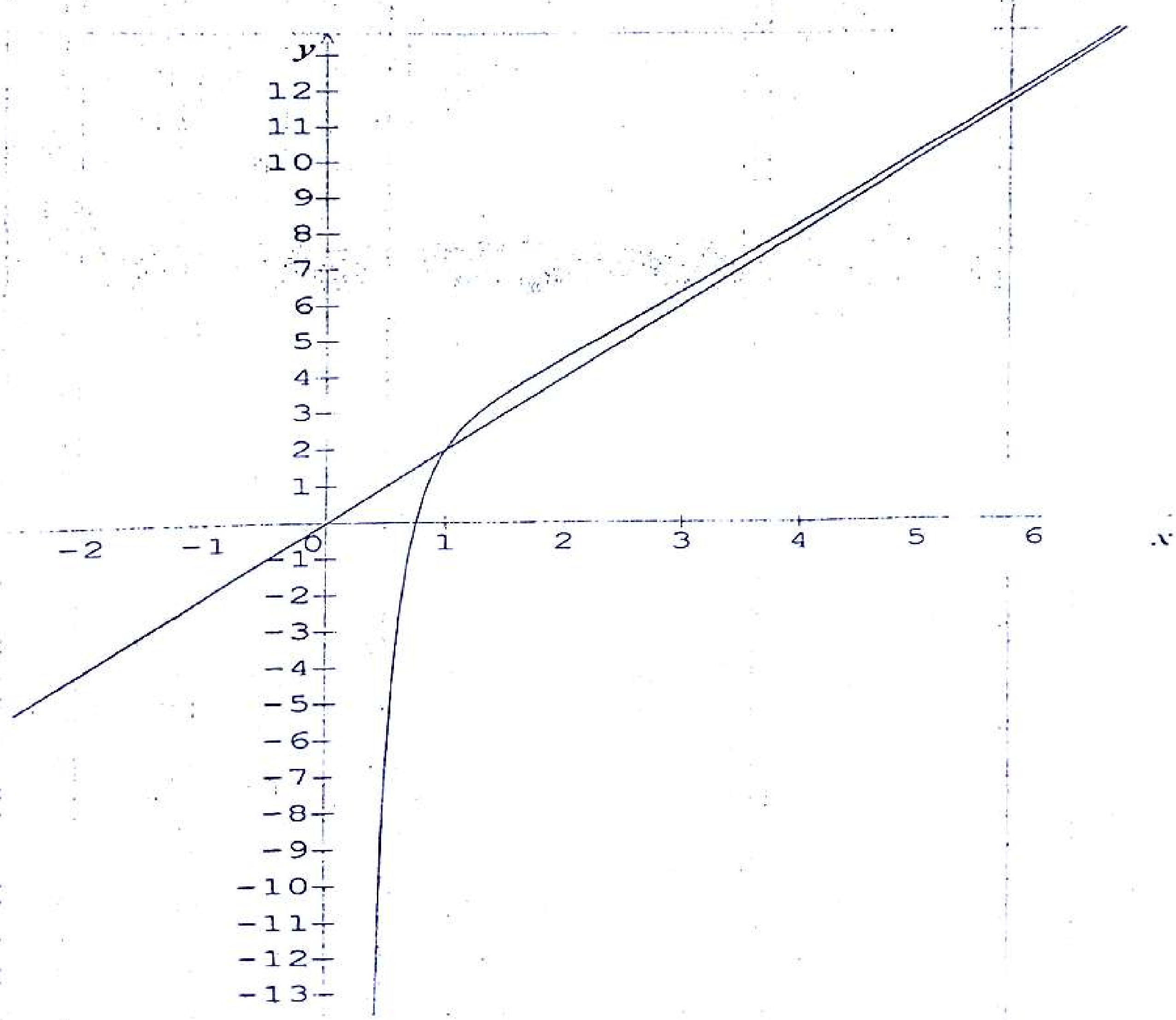
Posons : $u = \ln x$ et $v = \frac{1}{x}$ on a $u' = \frac{1}{x}$ et $v' = -\frac{1}{x^2}$

$$(u.v)' = u'v + v'u \Rightarrow \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow -\frac{\ln x}{x^2} = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' - \frac{1}{x^2} = \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right)' = \left(\frac{1 + \ln x}{x}\right)'$$

Donc une primitive de $-\frac{\ln x}{x^2}$ est $\frac{1+\ln x}{x}$

D'où

$$A = -3\left[\frac{1 + \ln x}{x}\right]_1^e = -3\left(\frac{2}{e} - 1\right)cm^2 = \left(3 - \frac{6}{e}\right)cm^2 \approx 0{,}79cm^2$$



Lycée Etoile Polaire

Baccalauréat de l'enseignement du second degré Session de juin 2016

Épreuve de mathématiques série D Durée 04 h coefficient 4

Exercice 1 :

1) Résoudre dans C l'équation : $z^2 - (1+\sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$
2) Résoudre dans C les équations : $z + \frac{1}{z} = 1$ et $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$
3) Soit P(z) le polynôme défini par : $P(z) = z^4 - (1+\sqrt{2})z^3 + (2+\sqrt{2})z^2 - (1+\sqrt{2})z + 1$

a. Exprimer $\frac{P(z)}{z^2}$ en fonction de $u = z + \frac{1}{z}$

b. Résoudre $\frac{P(z)}{z^2} = 0$

Exercice 2 :

(U_n) est la suite définie par : $\begin{cases} U_{1=2} \\ U_{n+1} = 2U_n - \frac{1}{3} \end{cases}$ $\forall n \in N^*$

1. Déterminer le réel α tel que la suite (V_n), définie par $V_n = U_n - \alpha$ $\forall n \in N^*$, soit une suite géométrique.
2. Exprimer V_n en fonction de n puis U_n en fonction de n
3. Exprimer $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ en fonction de n.
4. Calculer la limite de la suite (U_n) et celle de la suite (S_n).

Problème :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - 1 + 2\frac{\ln x}{x}$, on note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan (unité graphique $2cm$).

1. Soit g la fonction définie par : $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$

a. Étudier les limites de g en 0 et en $+\infty$.

b. Étudier les variations de g sur $]0;+\infty[$ et dresser son tableau de variation.

c. Déduire de ce qui précède le signe de g sur $]0;+\infty[$.

2.

a. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$, déterminer la dérivée f' de f sur $]0;+\infty[$ et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

c. Vérifier que f' a le même signe que g sur $]0;+\infty[$.

d. Dresser le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.

e. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$.

f. Étudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D).

g. Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et de (D).

h. Tracer (D), (T) et $(\mathcal{C}_f)$.

3. On désigne par h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = (\ln x)^2$.

a. Calculer $h'(x)$.

b. α étant un nombre réel strictement supérieur à 1, calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C}_f)$; (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

c. Calculer :

$$\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha)$$

19

Correction BAC D 2016

Exercice 1 :

1) Résolvons dans C l'équation : $z^2 - (1+\sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$

On a : $\Delta = (1+\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2$ d'où $z_1 = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}{2} = 1$ et $z_2 = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2}-1}{2} = \sqrt{2}$. Soit S l'ensemble solution de cette équation. On a : $S = \{1 ; \sqrt{2}\}$

2) Résolvons dans C les équations : $z + \frac{1}{z} = 1$ et $z + \frac{1}{z} = \sqrt{2}$

Chacune de ces expressions n'a de sens qui si $z \neq 0$

- Pour $z \neq 0$,

$$z + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0 \ ; \ \Delta = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$$

D'où $z_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ l'ensemble solution est $S' = \left\{\frac{1-i\sqrt{3}}{2} ; \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$

- Pour $z \neq 0$,

$$z + \frac{1}{z} = \sqrt{2} \Leftrightarrow z^2 - z\sqrt{2} + 1 = 0 \ ; \ \Delta = 2 - 4 = -2 = (i\sqrt{2})^2$$

D'où $z_1 = \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$ l'ensemble solution est $S'' = \left\{\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right\}$

3) Soit P(z) le polynôme défini par : $P(z) = z^4 - (1+\sqrt{2})z^3 + (2+\sqrt{2})z^2 - (1+\sqrt{2})z + 1$

a) Exprimons $\frac{P(z)}{z^2}$ en fonction de $u = z + \frac{1}{z}$

On a :

$$\frac{P(z)}{z^2} = z^2 - (1+\sqrt{2})z + 2 + \sqrt{2} - \frac{1+\sqrt{2}}{z} + \frac{1}{z^2} = \left(z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}\right) - (1+\sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + \sqrt{2}$$
$$= \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - (1+\sqrt{2})\left(z + \frac{1}{z}\right) + \sqrt{2} = u^2 - (1+\sqrt{2})u + \sqrt{2}$$

b) Résolvons $\frac{P(z)}{z^2} = 0$

On a : $\frac{P(z)}{z^2} = 0 \Leftrightarrow u^2 - (1+\sqrt{2})u + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow u = 1 \ ou \ u = \sqrt{2}$ (d'après la question 1)

- $u = 1 \Leftrightarrow \ z_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \ ou \ z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ (d'après la question 2)
- $u = \sqrt{2} \Leftrightarrow \ z_3 = \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2} \ ou \ z_4 = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$ (d'après la question 2)

Soit E l'ensemble solution de l'équation $\frac{P(z)}{z^2} = 0$

$$E = \left\{\frac{1-i\sqrt{3}}{2} ; \frac{1+i\sqrt{3}}{2} ; \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right\}$$

Exercice 2 :

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_{1=2} \\ U_{n+1} = 2U_n - \frac{1}{3} \end{cases}$ $\forall n \in N^*$

1) Déterminons le réel α tel que la suite (V_n), définie par $V_n = U_n - \alpha$ $\forall n \in N^*$, soit une suite géométrique.

(V_n) est une suite géométrique si et seulement si il existe un réel non nul q tel que $\forall n \in N^*$, $q = \frac{V_{n+1}}{V_n}$.

On a :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_2} \Leftrightarrow \frac{U_2 - \alpha}{U_1 - \alpha} = \frac{U_3 - \alpha}{U_2 - \alpha}$$

Or $U_1 = 2$; $U_2 = 2U_1 - \frac{1}{3} = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$; $U_3 = 2U_2 - \frac{1}{3} = \frac{22}{3} - \frac{1}{3} = 7$

D'où pour $\alpha \neq 2$ et $\alpha \neq \frac{11}{3}$,

$$\frac{\frac{11}{3} - \alpha}{2 - \alpha} = \frac{7 - \alpha}{\frac{11}{3} - \alpha} \Leftrightarrow (2-\alpha)(7-\alpha) = \left(\frac{11}{3} - \alpha\right)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - 9\alpha + 14 = \alpha^2 - \frac{22}{3}\alpha + \frac{121}{9} \Leftrightarrow \frac{5}{3}\alpha$$
$$= \frac{5}{9} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}.$$

Et pour $\alpha = \frac{1}{3}$, $V_{n+1} = U_{n+1} - \frac{1}{3} = 2U_n - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 2\left(U_n - \frac{1}{3}\right) = 2V_n$

Pour $\alpha = \frac{1}{3}$ (V_n) est une suite géométrique de raison 2

2) Exprimons V_n en fonction de n puis U_n en fonction de n

(V_n) est une suite géométrique de premier terme $V_1 = U_1 - \frac{1}{3} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ et de raison $q = 2$ d'où $\forall n \in N^*$ $V_n = \frac{5}{3} \times 2^{n-1} = \frac{5}{6} \times 2^n$

$$V_n = U_n - \frac{1}{3} \Leftrightarrow U_n = V_n + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \times 2^n + \frac{1}{3}$$

3) Exprimons $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ en fonction de n.

$$S_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n + \frac{n}{3} = V_1\left(\frac{2^n - 1}{2 - 1}\right) = \frac{5}{3}(2^n - 1) + \frac{n}{3}$$

4) Calculons la limite de la suite (U_n) et celle de la suite (S_n).

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{5}{6} \times 2^n = +\infty \quad car\ q > 1 \quad et \quad \frac{5}{6} > 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{3}(2^n - 1) + \frac{n}{3}\right) = +\infty$$

Problème

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - 1 + 2\frac{\ln x}{x}$, on note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan (unité graphique $2cm$).

1) Soit g la fonction définie par : $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$

a) Etudions les limites de g en 0 et en $+\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2 + 2 - 2\ln x) = \lim_{x\to 0^+}(2 - 2\ln x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(x^2 + 2 - 2\ln x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{2\ln x}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

b) Étude des variations de g sur $]0;+\infty[$ et dressons son tableau de variation.

g est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions continues et dérivables sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ *ou* $x = -1$ comme $x \in]0;+\infty[$, on en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$		$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

c) D'après le tableau de variations, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g(x) > 0$

2)

a) Etudions les limites de f en 0 et en $+\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x - 1 + \frac{2\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\ln x}{x}\right) = -\infty$$

Car

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to 0^+} 2\ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - 1 + \frac{2\ln x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

Car

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = 0$$

b) Justifions que f est dérivable sur $]0;+\infty[$, déterminons la dérivée f' de f sur $]0;+\infty[$ et montrons que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

Les fonctions $x-1$; $2\ln x$; et $\frac{1}{x}$ étant toutes continues et dérivables sur $]0;+\infty[$, f est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ comme de la fonction $x-1$ par le produit des fonctions $2\ln x$ *et* $\frac{1}{x}$.

$$\forall x \in]0;+\infty[,\qquad f'(x) = 1 + 2\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right) = \frac{x^2+2-2\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

c) Vérifions que f' a le même signe que g sur $]0;+\infty[$.

$\forall x \in]0;+\infty[$, $x^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ car $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

d) Dressons le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$
$f(x)$	|| $-\infty$	$+\infty$

e) Montrons que la droite (D) d'équation $y = x-1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$.

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to+\infty}\left[x-1+\frac{2\ln x}{x}-(x-1)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln x}{x}\right) = 0$$

Donc (D): $y = x-1$ est asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C})$

f) Etudions la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (D).

On a : $f(x)-y = \frac{2\ln x}{x}$. D'où $f(x)-y=0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. On en déduit le tableau de signe suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-y$	|| $-$		$+$

- Pour $x \in]0;1[$, $(\mathcal{C}_f)$ est en dessous de (D)
- Pour $x \in]1;+\infty[$, $(\mathcal{C}_f)$ est au dessus de (D)

g) Déterminons l'équation réduite de la tangente (T) à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et de (D).

Commençons par déterminer l'abscisse du point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et de (D). L'abscisse x de ce point est tel que

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{2\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

L'équation de la tangente (T) est donc

$$y = (f'(1))(x-1) + f(1) = 3(x-1) + 0 = 3x - 3; \quad y = 3x - 3$$

h) Traçage de $(D), (T)$ et $(\mathcal{C}_f)$. Après la question 3.

3) On désigne par h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = (\ln x)^2$.

a) Calculons $h'(x)$.

$$h'(x) = 2(\ln x)' \ln x = \frac{2\ln x}{x}$$

b) α étant un nombre réel strictement supérieur à 1 , calculons l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan limitée par $(\mathcal{C}_f)$; (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

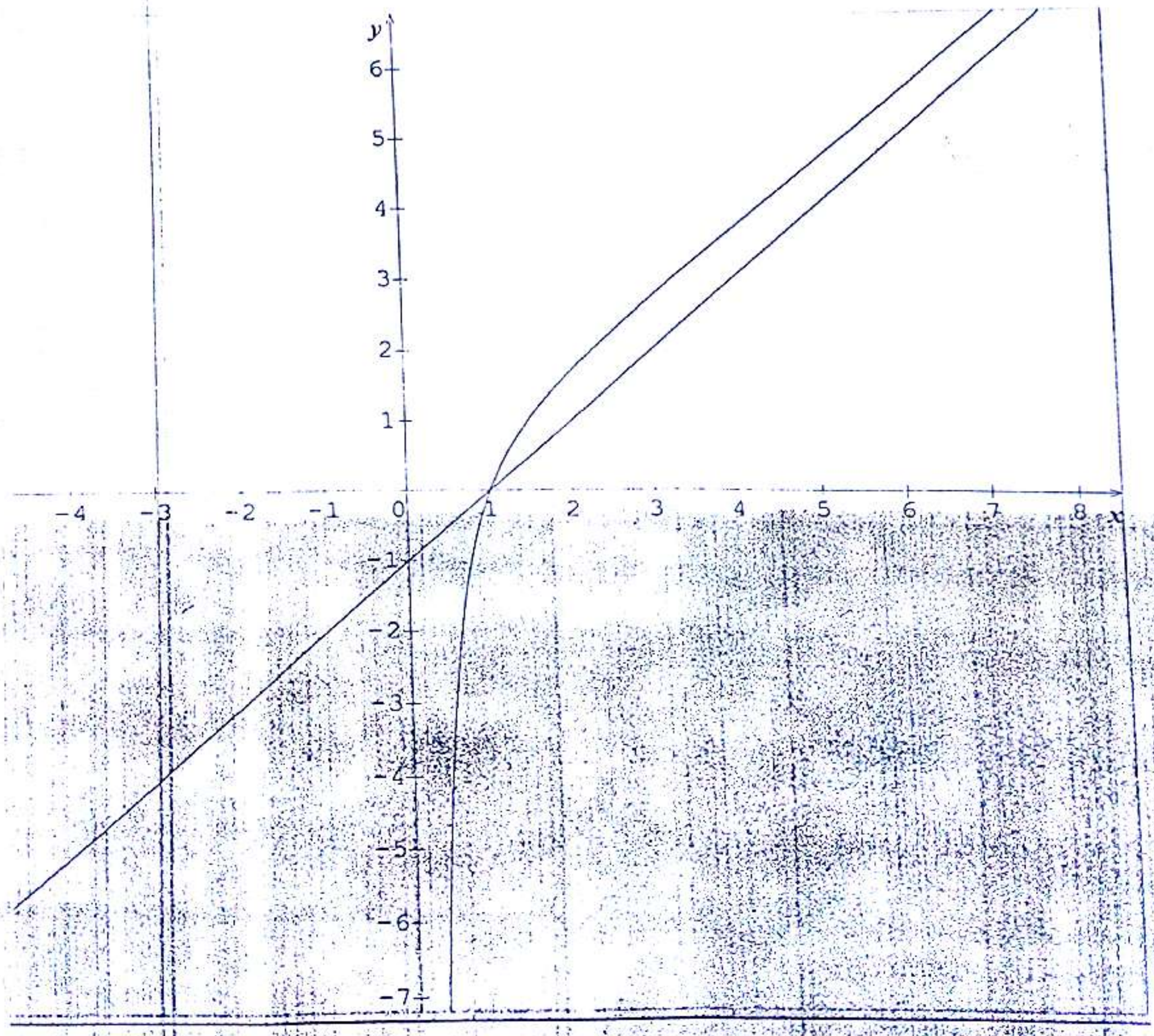
$$A(\alpha) = \int_1^\alpha [f(x) - y]dx = \int_1^\alpha \frac{2\ln x}{x} dx$$

En posant $u = \ln x$, on a $u' = \frac{1}{x}$ d'où $(u^2)' = 2u'u = \frac{2\ln x}{x}$

Ainsi $A(\alpha) == [(\ln x)^2]_1^\alpha = \ln^2 \alpha - \ln 1 = \ln^2 \alpha$

c) Calcul de la limite de $A(\alpha)$:

$$\lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha) = \lim_{\alpha \to +\infty} (\ln^2 \alpha) = +\infty$$



Baccalauréat de l'enseignement du second degré Session de juin 2017
Épreuve de mathématiques série D Durée 04 h coefficient 4

Exercice 1 : On considère l'application f de C définie par : $f(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12)$

1. A) Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle z_1.
B) Déterminer le polynôme du second degré P de coefficient complexes tel que, pour tout $z \in C$, $f(z) = (z - z_1)P(z)$.
2. A) Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_2 (on notera z_3 la solution différente de z_1 et de z_2).
B) Résoudre l'équation $f(z) = 0$
3. Dans le plan complexe P, on considère les points A, B et C d'affixes respectifs z_1; z_2; et z_3. Montrer que ces trois points sont alignés.

Exercice 2 : On considère la suite $(U_n)_{n\in N}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n - 4}{U_n - 1} \end{cases}$

1. A) Démontrer en raisonnant par récurrence que cette suite est minorée par 2.
B) Prouver que pour tout n, $U_{n+1} - U_n = -\frac{(U_n-2)^2}{U_n-1}$. En déduire le sens de variation de cette suite.
C) Justifier que cette suite est convergente et qu'elle converge vers 2.
2. On considère la suite $(V_n)_{n\in N}$ définie par : $V_n = \frac{1}{U_n - 2}$
a) Démontrer que (V_n) est arithmétique.
b) Donner l'expression de V_n puis celle de U_n en fonction de n.
3. On considère la suite $(W_n)_{n\in N}$ définie par : $W_n = \ln(U_n)$.
a) Justifier que (W_n) converge vers ln 2.
b) Prouver que la suite (W_n) est décroissante.
c) Résoudre dans N l'inéquation $|W_n - \ln 2| \leq 10^{-2}$.

Problème :

Partie A : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{1}{2}$, et C_f sa représentation graphique.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Les interpréter graphiquement.
2. Étudier les variations de f.
3. Démontrer que cette fonction est impaire. Qu'en déduit-on de C_f ?
4. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B : On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{1}{2}x$ et C_g sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{2}x = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)$.

Dans les questions suivantes, il faudra choisir la forme la plus commode de $g(x)$, parmi les trois formes vues, pour parvenir aux réponses demandées.

2. Vérifier que $g' = f$. En déduire les variations de g.
a) Déterminer les limites de g en $+\infty$
b) Prouver qu'en $+\infty$, la droite $(\Delta): y = \frac{1}{2}x$ est asymptote à C_g

20

Correction BAC D 2017

Exercice 1 :

On considère l'application f de C définie par : $f(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12)$

1. A) Démontrons que l'équation $f(z) = 0$ admet une unique solution réelle z_1.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 9ix^2 + 12ix - 22x - 12i - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 22x - 36 = 0 & (1) \\ 9x^2 + 12i - 12 = 0 & (2) \end{cases}$$

Pour (2), $\Delta = 12^2 + 4 \times 9 \times 12 = 576 = 24^2$ d'où $x_1 = \frac{-12-24}{18} = -2$ et $x_2 = \frac{-12+24}{18} = \frac{2}{3}$

En remplaçant x par -2 dans (1), on obtient $-2^3 - 22(-2) + 36 = -8 + 44 - 36 = 0$

En remplaçant x par $\frac{2}{3}$ dans (1), on obtient $\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 22\left(\frac{2}{3}\right) + 36 = \frac{8}{27} - \frac{44}{3} + 36 = \frac{8-396+324}{27} = -\frac{64}{27} \neq 0$

Donc $z_1 = -2$ est l'unique solution réelle de l'équation $f(z) = 0$

B) Déterminons le polynôme du second degré P de coefficient complexes tel que, pour tout $z \in C$, $f(z) = (z - z_1)P(z)$.

Posons $P(z) = az^2 + bz + c$ où a, b et c sont des nombres complexes. On a :

$$(z - z_1)P(z) = (z + 2)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b + 2a)z^2 + (c + 2b)z + 2c$$

D'où par identification des coefficients,

$$f(z) = (z - z_1)P(z) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + 2a = 9i \\ c + 2b = 2(6i - 11) \\ 2c = -3(4i + 12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 + 9i \\ c = -18 - 6i \end{cases}$$

D'où $P(z) = z^2 + (-2 + 9i)z - 18 - 6i$

2. A) Démontrons que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_2

Soit y un nombre réel non nul

$f(iy) = 0 \Leftrightarrow (iy + 2)[(iy)^2 + (-2 + 9i)(iy) - 18 - 6i] = 0 \Leftrightarrow -y^2 - 2iy - 9y - 18 - 6i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -y^2 - 9y - 18 = 0 & (1) \\ -2y - 6 = 0 & (2) \end{cases}$ car $iy + 2 \neq 0\ \forall y \in \mathbb{R}$

$(2) \Leftrightarrow y = -3$ et $y = -3$ dans $(1) \Rightarrow -9 + 27 - 18 = 0$ ce qui est exacte.

Donc $z_2 = -3i$

B) Résolvons l'équation $f(z) = 0$

Commençons par trouver les nombres complexes a' et b' tels que $P(z) = (z + 3i)(a'z + b')$

On a : $(z + 3i)(a'z + b') = a'z^2 + (b' + 3a'i)z + 3b'i$. En identifiant les coefficients, on obtient

$$\begin{cases} a' = 1 \\ b' + 3a'i = -2 + 9i \\ 3b'i = -18 - 6i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = 1 \\ b' = -2 + 6i \end{cases}$$

On en déduit que $f(z) = (z+2)(z+3i)(z-2+6i)$

Donc $f(z) = 0 \Leftrightarrow z_1 = -2$ *ou* $z_2 = -3i$ *ou* $z_3 = 2 - 6i$

C) Dans le plan complexe P, considérons les points A, B et C d'affixes respectifs z_1; z_2; et z_3. Montrons que ces trois points sont alignés.

$$\frac{z_{\overline{AB}}}{z_{\overline{AC}}} = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-3i + 2}{2 - 6i + 2} = \frac{2 - 3i}{2(2 - 3i)} = \frac{1}{2}.$$

$\frac{z_{\overline{AB}}}{z_{\overline{AC}}} = \frac{1}{2}$ étant un nombre réel non nul, les point A, B et C sont alignés.

Exercice 2 :

Considérons la suite $(U_n)_{n\in N}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n - 4}{U_n - 1} \end{cases}$

1. A) Démontrons en raisonnant par récurrence que cette suite est minorée par 2 .

On veut montrer que, $\forall n \in N$, $U_n \geq 2$

On a $U_0 = 3$ et $2 \leq 3$ donc $U_0 \geq 2$

Montrons que $U_n \geq 2 \Rightarrow U_{n+1} \geq 2$.

Supposons $U_n \geq 2$

On a : $U_{n+1} < 2 \Rightarrow \frac{3U_n - 4}{U_n - 1} < 2 \Rightarrow 3U_n - 4 < 2(U_n - 1)$

Car $U_n \geq 2 \Rightarrow U_n - 1 \geq 1 \Rightarrow U_n - 1 > 0$

D'où $U_{n+1} < 2 \Rightarrow 3U_n - 2U_n < -2 + 4 \Rightarrow U_n < 2$ *ce qui est contradictoire avec* $U_n \geq 2$

Donc $U_n \geq 2 \Rightarrow U_{n+1} \geq 2$ (*cette méthode de raisonnement s'appelle l'absurde*)

B) Prouvons que pour tout n, $U_{n+1} - U_n = -\frac{(U_n - 2)^2}{U_n - 1}$.

On a :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n - 4}{U_n - 1} - U_n = \frac{3U_n - 4 - U_n(U_n - 1)}{U_n - 1} = -\frac{U_n^2 - 4U_n + 4}{U_n - 1} = -\frac{(U_n - 2)^2}{U_n - 1}.$$

Déduisons-en le sens de variation de (U_n).

On a montré que, $\forall n \in N$, $U_n \geq 2$. donc $U_n - 1 \geq 1 \Rightarrow U_n - 1 > 0 \Rightarrow -\frac{(U_n-2)^2}{U_n - 1} \leq 0$.

Par ailleurs, $U_n = 2 \Rightarrow U_{n+1} - U_n = 0 \Rightarrow U_{n+1} = U_n$: (U_n) serait constante c'est-à-dire $U_0 = 2$; ce qui est contradictoire à $U_0 = 3$.

Donc $\frac{(U_n-2)^2}{U_n - 1} \neq 0$. D'où $= -\frac{(U_n-2)^2}{U_n - 1} < 0$

Comme $U_{n+1} - U_n = -\frac{(U_n-2)^2}{U_n-1} < 0$, la suite (U_n) est strictement décroissante.

C) Justifions que cette suite est convergente.

(U_n) étant minorée et strictement décroissante, (U_n) est convergente.

Montrer qu'elle converge vers 2 . On ne peut affirmer ni infirmer que la suite (U_n) converge vers 2 sous le seul prétexte qu'elle est décroissante et minorée par 2 . Il faudrait que :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 2$$

Ce qui requière le formule explicite de U_n pour un niveau de terminale D

2. Considérons la suite $(V_n)_{n\in N}$ définie par : $V_n = \frac{1}{U_n-2}$
   a) Démontrons que (V_n) est arithmétique.

On a :

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1}-2} - \frac{1}{U_n-2} = \frac{1}{\dfrac{3U_n-4}{U_n-1}-2} - \frac{1}{U_n-2} = \frac{U_n-1}{U_n-2} - \frac{1}{U_n-2} = 1$$

Donc (V_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$

b) Donnons l'expression de V_n en fonction de n

On a : $V_0 = \frac{1}{U_0-2} = \frac{1}{3-2} = 1$ et $r = 1$ donc $V_n = V_0 + nr = 1 + n$

Le terme général de (V_n) est $V_n = 1 + n$

Donnons l'expression de U_n en fonction de n.

On a :

$$V_n = \frac{1}{U_n-2} \Rightarrow V_n(U_n-2) = 1 \Rightarrow U_n - 2 = \frac{1}{V_n} \Rightarrow U_n = \frac{1}{V_n} + 2 = \frac{1}{1+n} + 2$$

Le terme général de (U_n) est $U_n = \frac{1}{1+n} + 2$

Maintenant il convient de dire que (U_n) converge vers 2 car avec sa formule explicite,

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 2$$

3. Considérons la suite $(W_n)_{n\in N}$ définie par : $W_n = \ln(U_n)$.
   a) Justifions que (W_n) converge vers ln 2.

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 2 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \ln(U_n) = \ln 2 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} W_n = \ln 2$$

Donc (W_n) converge vers ln 2

b) Prouvons que la suite (W_n) est décroissante.

On a montré que, pour tout $n \in N$, (U_n) est décroissante. Par ailleurs la fonction ln est strictement croissante. Ainsi,

$$\forall n \in N, \quad U_{n+1} < U_n \Rightarrow \ln(U_{n+1}) < \ln(U_n) \Rightarrow W_{n+1} < W_n$$

Donc la suite (W_n) est strictement décroissante

c) Résolvons dans N l'inéquation $|W_n - \ln 2| \leq 10^{-2}$.

(W_n) est strictement décroissante et, la limite de (W_n) est $\ln 2$ donc $\ln 2$ est un minorant de (W_n). Donc $W_n - \ln 2 > 0 \Rightarrow |W_n - \ln 2| = W_n - \ln 2$. Ainsi,

$$|W_n - \ln 2| \leq 10^{-2} \Rightarrow W_n - \ln 2 \leq 10^{-2} \Rightarrow W_n \leq \ln 2 + 10^{-2} \Rightarrow \ln(U_n) \leq \ln 2 + 10^{-2}$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{1+n} + 2\right) \leq \ln 2 + 10^{-2} \Rightarrow \frac{1}{n+1} + 2 \leq e^{\ln 2 + 10^{-2}} \Rightarrow \frac{1}{n+1}$$
$$\leq 2e^{0,01} - 2 \Rightarrow n + 1 \geq \frac{1}{2(e^{0,01} - 1)} \Rightarrow n \geq \frac{1}{2(e^{0,01} - 1)} - 1 \Rightarrow n \geq 48{,}75.$$

Comme $n \in N$, donc $n \geq 49$ est la solution de l'inéquation $|W_n - \ln 2| \leq 10^{-2}$

Problème :

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{1}{2}$, et C_f sa représentation graphique.

1. Déterminons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interprétons les résultats graphiquement.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \quad car \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Donc la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$ est asymptote horizontal à C_f

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{1}{2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{e^x} - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote horizontal à C_f

2. Etudions les variations de f.

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. Et,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

On en déduit que f est strictement croissante.

3. Démontrons que cette fonction est impaire.

Soit $x \in \mathbb{R}$ on a : $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x)=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}-\frac{1}{2}=\frac{e^{x}.e^{-x}}{e^{x}(e^{-x}+1)}-\frac{1}{2}=\frac{1}{e^{x}+1}-\frac{1}{2}=\frac{2-e^{x}-1}{2(e^{x}+1)}=\frac{(1+e^{x})-2e^{x}}{2(e^{x}+1)}$$
$$=-\frac{e^{x}}{(e^{x}+1)}+\frac{1}{2}=-\left(\frac{e^{x}}{e^{x}+1}-\frac{1}{2}\right)=-f(x)$$

Donc f est impaire.

On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet le point $O(0;0)$ comme centre de symétrie

4. Déterminons le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Comme f est strictement croissante et impaire, l'équation $f(x)=0$ admet 0 comme unique solution. D'où :

- Pour $x\in]-\infty;0[$, $f(x)<0$
- Pour $x\in]0;+\infty[$, $f(x)>0$

Partie B :

Considérons maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\ln(e^{x}+1)-\frac{1}{2}x$ et $\mathcal{C}_g$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. Prouvons que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\ln(1+e^{-x})+\frac{1}{2}x=\ln\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)$.

Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$g(x)=\ln(e^{x}+1)-\frac{1}{2}x=\ln(e^{x}+1)+\ln\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)=\ln\left((e^{x}+1)\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)\right)$$
$$=\ln\left(e^{x-\frac{1}{2}x}+e^{-\frac{1}{2}x}\right)=\ln\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)$$

Et

$$\ln(1+e^{-x})+\frac{1}{2}x=\ln(1+e^{-x})+\ln(e^{\frac{1}{2}x})=\ln\left((1+e^{-x})\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)\right)=\ln\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)$$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\ln(1+e^{-x})+\frac{1}{2}x=\ln\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)$

2. Vérifions que $g'=f$.

g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et,

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad g'(x)=(e^{x}+1)'\times\frac{1}{e^{x}+1}-\frac{1}{2}=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}-\frac{1}{2}=f(x)$$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=f(x)$

Déduisons-en les variations de g .

Le signe de f précédemment étudier nous permet de dire :

- Pour $x\in]-\infty;0[$, est strictement décroissante.
- Pour $x\in]0;+\infty[$, est strictement croissante
    a) Déterminons les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2}\right) = +\infty .$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln(e^{x}+1) - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\ln 1 - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x}{2}\right) = +\infty .$$

b) Prouvons qu'en $+\infty$, la droite $(\Delta): y = \frac{1}{2}x$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[g(x) - \frac{x}{2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln(1+e^{-x}) + \frac{1}{2}x - \frac{x}{2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x}) = 0$$

Donc la droite (Δ): $y = \frac{x}{2}$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_g$

c) Étude la position relative de $\mathcal{C}_g$ avec (Δ) .

On a : $g(x) - y = \ln(e^{-x}+1)$. Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0 \Rightarrow e^{-x}+1 > 1 \Rightarrow \ln(1+e^{-x}) > 0$

Donc $\mathcal{C}_g$ est au dessus de (Δ)

d) Démontrons que la fonction g est paire.

Soit $x \in \mathbb{R}$ on a : $-x \in \mathbb{R}$ et,

$$g(-x) = \ln\left(e^{\frac{-x}{2}} + e^{-\frac{-x}{2}}\right) = \ln\left(e^{-\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}}\right) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right) = g(x)$$

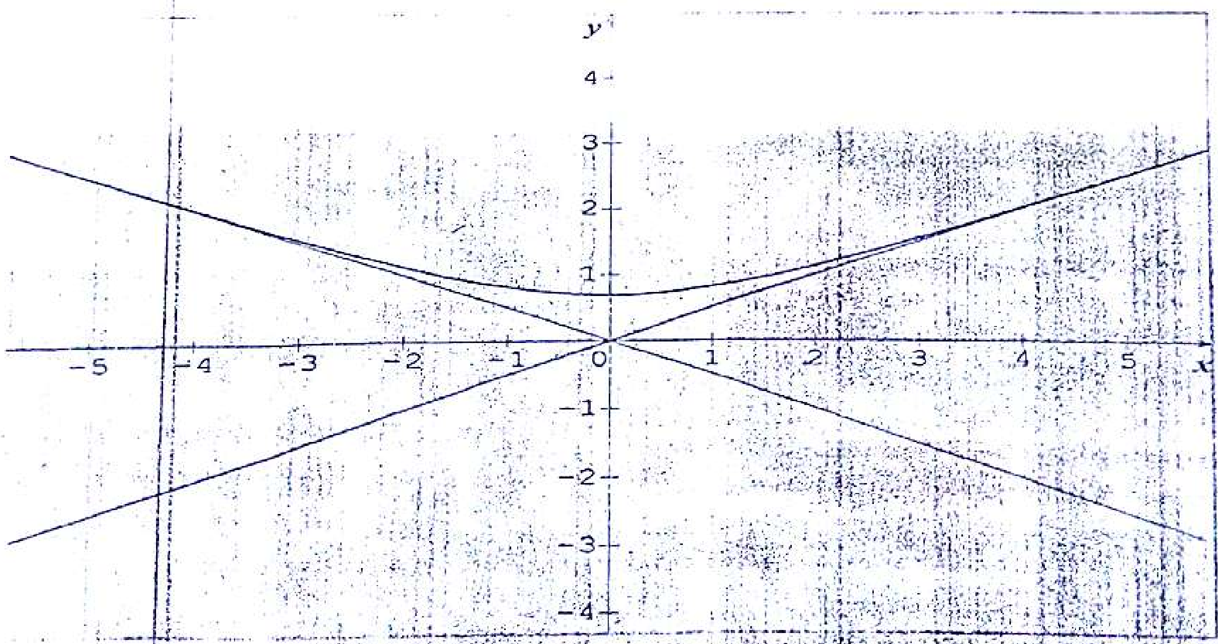
Donc g est une fonction paire.

On en déduit que $\mathcal{C}_g$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Déduisons-en l'équation de l'asymptote oblique à $\mathcal{C}_g$ en $-\infty$.

Comme $\mathcal{C}_g$ admet (OJ) comme axe de symétrie, alors $\mathcal{C}_g$ admet pour asymptote en $-\infty$ l'image de (Δ) par rapport à la symétrie d'axe (OJ). Or l'image de (Δ) par rapport à (OJ) est $(\Delta'): y = -\frac{1}{2}x$

e) Dessin de $\mathcal{C}_g$ avec ses asymptotes.



Baccalauréat de l'enseignement du second degré Session de juin 2018

Épreuve de mathématiques série D Durée 04 h coefficient 4

Exercice 1 :

1) $P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8$
   a) Montrer que pour tout $z \in C$, $P(z) = (z-2)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4)$
   b) Résoudre dans C, l'équation $(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4) = 0$. On notera z_1 et z_2 les deux solutions distinctes avec $Im(z_1) > 0$.
   c) Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2, puis $Z = \frac{z_1}{z_2}$.
2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$
   a) Soit f la transformation du plan qui, à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z$
      A1) Préciser la nature de f ainsi que ses éléments caractéristiques.
      A2) Déterminer l'affixe a' du point A' image du point $A(\sqrt{3}+i)$ par f
   b) Soit h l'homothétie de centre A' et de rapport $\frac{3}{2}$. Déterminer l'affixe ω du point Ω image du point O par h
      B1) Soit $B\left(-2 + i(\sqrt{3}-1)\right)$. Montrer que : $(\Omega B) \perp (\Omega A)$.
      B2) En déduire que Ω, B, et A sont un même cercle. Préciser son centre et son rayon.

Exercice 2 : Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 10. Un jeu consiste à tirer au hasard et simultanément quatre boules de l'urne et à s'intéresser aux nombres écrits sur les boules tirées.

1) Quel est le nombre d'éventualités ?
2) Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   a) **Obtenir un seul multiple de 3**
   b) **Ne obtenir aucun multiple de 3**
   c) Obtenir deux multiples de 3 et deux seulement.
   d) Obtenir au moins un nombre multiple de 3.

PROBLEME

Partie A : On considère la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1$

1-a) Justifier que la limite de g en $+\infty$ est -1

1-b) Déterminer la limite de g en $-\infty$

2-a) Démontrer que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $g'(x) = (x-2)e^{1-x}$

2-b) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

3-a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α.

3-b) Justifier que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

4) En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B : On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est $2cm$.

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2) A) Démontrer f est une primitive de g
   B) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3) A) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$
   B) Étudier la position relative de (D) par rapport à (C)
4) Démontrer que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$
5) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1
6) Démontrer que $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$
7) Justifier que pour tout nombre réel x, $f(-x+2) = e^{x-1}f(x)$
8) On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions. On appelle β l'une de ces solutions. Démontrer que $-\beta + 2$ est l'autre solution.
9) Tracer (D), (T) et (C). On prendra $\alpha = 0.4$ et $\beta = 2{,}5$.

21

Correction BAC D 2018

Exercice 1 :

1) $P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$

a) Montrons que pour tout $z \in C$, $P(z) = (z - 2)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4)$

Pour tout $z \in C$, on a :

$$(z - 2)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4) = z^3 + 2\sqrt{2}z^2 + 4z - 2z^2 - 4\sqrt{2}z - 8$$
$$= z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8.$$

D'où, pour tout $z \in C$, $P(z) = (z - 2)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4)$

b) Résolvons dans C , l'équation $(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4) = 0$. On notera z_1 et z_2 les deux solutions distinctes avec $Im(z_1) > 0$.

$$\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4 \times 4 = -8$$

Donc les deux racines de Δ sont : $\delta_1 = 2i\sqrt{2}$ et $\delta_2 = -2i\sqrt{2}$.

Ainsi les deux solutions de l'équation $(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4) = 0$ sont :

$$z_1 = \frac{-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \ et \ z_2 = \frac{-2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

c) Déterminons le module et l'argument de z_1 et z_2 , puis $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

On a :

- $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ d'où $|z_1| = 2$ et l'argument de z_1 est $\arg(z_1) = -\frac{\pi}{4}$
- $z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ d'où $|z_1| = 2$ et l'argument de z_1 est $\arg(z_1) = -\frac{3\pi}{4}$
- $|Z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{2} = 1$

Et $\arg(Z) = \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + 2k\pi \ k \in \mathbb{Z} = -\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ k \in \mathbb{Z} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi l'argument de Z est $\frac{\pi}{2}$ et $|Z| = 1$

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

a) Soit f la transformation du plan qui, à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z$

A1) Précisons la nature de f ainsi que ses éléments caractéristiques.

On a : $\left|\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$; $\arg\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ k \in \mathbb{Z}$ et $z' = z \Leftrightarrow z = 0$

145

Donc f est la rotation de centre $O(0,0)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$: $r_{\left(O,\frac{\pi}{3}\right)}$

A2) Déterminons l'affixe a' du point A' image du point $A(\sqrt{3}+i)$ par f

On a : $z_{A'} = \left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z_A \Rightarrow a' = \left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3}+i) = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right) = 2i$

b) Soit h l'homothétie de centre A' et de rapport $\frac{3}{2}$. Déterminons l'affixe ω du point Ω image du point O par h.

On a : $\overrightarrow{A'\Omega} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A'O} \Rightarrow z_{\overrightarrow{A'\Omega}} = \frac{3}{2}z_{\overrightarrow{A'O}} \Rightarrow z_\Omega - z_{A'} = \frac{3}{2}(z_O - z_{A'}) \Rightarrow \omega = \frac{3}{2}(0-2i)+2i = -i$

B1) Soit $B\left(-2+i(\sqrt{3}-1)\right)$. Montrons que : $(\Omega B)\perp(\Omega A')$. Pour cela, nous allons montrer que $\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega}$ est un imaginaire pur.

On a : $z_B - \omega = -2+i(\sqrt{3}-1)+i = -2+i\sqrt{3}$; et

$z_A - \omega = \sqrt{3}+i-\omega = \sqrt{3}+i+i = \sqrt{3}+2i$. D'où :

$$\frac{z_B - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \frac{-2+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2i} = \frac{(-2+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-2i)}{3+4} = \frac{7i}{7} = i$$

Donc $(\Omega B)\perp(\Omega A)$

B2) Déduisons-en que Ω , B, et A appartiennent à un même cercle.

La question précédente montre que ΩAB est un triangle rectangle en Ω. Ainsi, ΩAB est inscriptible dans le cercle de diamètre $[AB]$. On en déduit que Ω , A, et B sont les point du cercle de rayon $r = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(-2-\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}-2)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$ et de centre

$$I\begin{pmatrix}\frac{x_B+x_A}{2}\\ \frac{y_B+y_A}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow I\begin{pmatrix}\frac{-2+\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}-1+1}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow I\begin{pmatrix}\frac{-2+\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Une urne contient dix boules numérotées de 1 à 10 . Un jeu consiste à tirer au hasard et simultanément quatre boules de l'urne et à s'intéresser aux nombres écrits sur les boules tirées.

1) Nombre d'éventualités : nous avons un tirage simultané de 04 éléments dans 10 :

Soit Ω l'univers associé à ce jeu. On a : $Card(\Omega) = C_{10}^4 = \frac{10!}{6!4!} = 210$

2) Déterminons la probabilité de chacun des évènements suivants :

a) Soit A : « Obtenir un seul multiple de 3 » on a :

Les multiples de 3 qu'on peut trouver dans cet ensemble de boules sont au nombre de trois : 3; 6 et 9. Lorsque l'un est dans la combinaison les autres ne peuvent plus s'y trouver. D'où

$Card(A) = C_3^1 \times C_7^3 = 105$ et $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{105}{210} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

b) Soit B: « Ne obtenir aucun multiple de 3 » on a :

$Card(B) = C_3^0 C_7^4 = 35$ et $P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{35}{210} = \frac{1}{6} \approx 0{,}1667$

c) Soit C : « Obtenir deux multiples de 3 et deux seulement » on a :

$Card(C) = C_3^2 C_7^2 = 63$ et $P(C) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \frac{63}{210} = \frac{3}{10} = 0{,}3$

d) Soit D : « Obtenir au moins un nombre multiple de 3 . » on a :

- Pour un seul multiple de 3 , on a 105 éventualités.
- Pour deux multiples de 3 , on a 63 éventualités.
- Pour trois multiples de 3 , on a $C_3^3 C_7^1 = 7$ éventualités.

D'où $Card(D) = 105 + 63 + 7 = 175$ et $P(D) = \frac{Card(D)}{Card(\Omega)} = \frac{175}{210} = \frac{5}{6} \approx 0{,}8333$

PROBLEME :

Partie A : On considère la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1$

1-a) Justifions que la limite de g en $+\infty$ est -1

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x}{e^{x-1}} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{e^x} - 1\right) = -1 \quad car \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right) = 0$$

1-b) Déterminons la limite de g en $-\infty$

Posons : $X = 1 - x$ on a : si x tend vers $-\infty$ alors X tend vers $+\infty$. D'où

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{X\to+\infty}(Xe^X - 1) = \lim_{X\to+\infty} Xe^X = +\infty$$

2-a) Démontrons que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $g'(x) = (x-2)e^{1-x}$

g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = -e^{1-x} - (1-x)e^{1-x} = (-1-1+x)e^{1-x} = (x-2)e^{1-x}$$

2-b) Etudions les variations de g et dresser son tableau de variation.

Le signe de g dépend exclusivement de celui de $(x-2)$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{1-x} > 0$.
D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$

117

On en déduit que :

- Pour $x \in]-\infty; 2[$, g est strictement décroissante.
- Pour $x \in]2; +\infty[$, g est strictement croissante.

D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	|	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	-1

3) -a) Démontrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α.

On a :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \quad ; \quad g(2) = -1 - \frac{1}{e}$$

De plus g est strictement monotone sur $]-\infty; 2[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha' \in]-\infty; 2[$, $g(\alpha') = 0$.

De plus $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -1$; $g(2) = -1 - \frac{1}{e}$ et g est strictement monotone (croissante) sur $[2; +\infty[$ donc quelque soit $x \in [2; +\infty[$ $g(x) < 0$.

Ainsi, $\exists! (\alpha = \alpha') \in \mathbb{R}$, $g(\alpha) = 0$

3-b) Justifions que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

On a : $g(0{,}4) \approx 0{,}093 > 0$ et $g(0{,}5) \approx -0{,}176 < 0$ donc il existe $\alpha'' \in]0{,}4; 0{,}5[$, $g(\alpha'') = 0$. Or l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution d'où $\alpha = \alpha''$

4) Déduisons-en le signe de $g(x)$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	|	$-$	

Partie B : Considérons la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$.
Notons (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
L'unité graphique est $2cm$.

1) Déterminons les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

On a :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(xe^{1-x} - x + 2) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^{x-1}} - x + 2\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\frac{1}{e^x} - 1 + \frac{2}{x}\right)\right]$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^x} - 1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}\right) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Et :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(xe^{1-x} - x + 2) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x-1}} - x + 2\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{1}{e^x} - 1 + \frac{2}{x}\right)\right]$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\right) = 0$; d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^x} - 1 + \frac{2}{x}\right) = -1$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$

2) A). Démontrons que f est une primitive de g. Pour cela, il suffit de démontrer que la dérivée de f est g.

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ somme de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} - 1 = (1-x)e^{1-x} - 1 = g(x)$. On en déduit que $f' = g$ donc f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$

B) Etudions les variations de f et dresser son tableau de variation.

D'après la question N°4 de la partie A, et la question 2A de la partie B, on a :

- Pour $x \in]-\infty;\alpha[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante
- Pour $x \in]\alpha;+\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante

D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

3) A) Démontrons que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - y] = \lim\limits_{x \to +\infty} [xe^{1-x} - x + 2 - (-x + 2)] = \lim\limits_{x \to +\infty} (xe^{1-x}) =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^{x-1}}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{e^{x}}\right) = 0.$

Donc $(D): y = -x + 2$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$

B) Etudions la position relative de (D) par rapport à (C)

On a : $f(x) - y = xe^{1-x}$. Donc le signe de $[f(x) - y]$ ne dépend que de celui de x.
D'où :

- Pour $x \in]-\infty; 0[$, on a $f(x) - y < 0$ donc (C) est en dessous de (D).
- Pour $x \in]0; +\infty[$, on a $f(x) - y > 0$ donc (C) est au dessus de (D).

4) Démontrons que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{xe^{1-x} - x + 2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^{1-x} - 1 + \frac{2}{x}\right).$

En posant $X = 1 - x$, on a : $x = 1 - X$ et, lorsque x tend vers $-\infty$, X tend vers $+\infty$.
D'où :

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{X \to +\infty} \left(e^{X} - 1 + \frac{2}{1 - X}\right) = +\infty$$

Car $\lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$; $\lim\limits_{X \to +\infty} \left(\frac{2}{1-X}\right) = 0$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} (-1) = -1$

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = +\infty$, alors (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$

5) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1

L'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 est :

$$y = (f'(1))(x - 1) + f(1)$$

Or : $f'(1) = g(1) = (1 - 1)e^{1-1} - 1 = -1$ et $f(1) = 1e^{1-1} - 1 + 2 = 2$.

D'où $y = -x + 3$ est l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1

6) Démontrons que $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$

On a : $f(\alpha) = \alpha e^{1-\alpha} - \alpha + 2 = 1 - \alpha + 1 + \alpha e^{1-\alpha} = 1 - \alpha + \frac{(1-\alpha)(1+\alpha e^{1-\alpha})}{1-\alpha} = 1 - \alpha +$ $\frac{(1+\alpha e^{1-\alpha} - \alpha - \alpha^2 e^{1-\alpha})}{1-\alpha} = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha} + \frac{\alpha(-1+(1-\alpha)e^{1-\alpha})}{1-\alpha} = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha} + \frac{\alpha g(\alpha)}{1-\alpha}$ or $g(\alpha) = 0$

D'où $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$

7) Justifions que pour tout nombre réel x , $f(-x+2) = e^{x-1}f(x)$

On a :

$$f(-x+2) = (-x+2)e^{1-(-x+2)} - (-x+2) + 2 = (-x+2)e^{x+3} + x$$
$$= e^{x-1}\left(\frac{(-x+2)e^{x-1}}{e^{x-1}} + \frac{x}{e^{x-1}}\right) = e^{x-1}(xe^{1-x} - x + 2) = e^{x-1}f(x)$$

8) En admettant que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions. Appelons β l'une de ces solutions. Démontrons que $-\beta + 2$ est l'autre solution.

D'après ce qui précède (question 7),

$$f(-\beta + 2) = e^{\beta - 1}f(\beta)$$

Ainsi $f(\beta) = 0 \Leftrightarrow e^{\beta-1}f(\beta) = 0 \Leftrightarrow f(-\beta + 2) = 0$. Donc si β est l'une des solutions de l'équation $f(x) = 0$, $-\beta + 2$ est l'autre

9) Tracer $(D), (T)$ et (C) . On prendra $\alpha = 0,4$ et $\beta = 2,5$.